



Schémas multiniveaux pour les équations d'ondes en dimension 1

Caterina Calgaro, Jean-Paul Chehab, Jacques Laminie, Ezzeddine Zahrouni

► To cite this version:

Caterina Calgaro, Jean-Paul Chehab, Jacques Laminie, Ezzeddine Zahrouni. Schémas multiniveaux pour les équations d'ondes en dimension 1. [Rapport de recherche] 2008, pp.50. inria-00271154

HAL Id: inria-00271154

<https://inria.hal.science/inria-00271154>

Submitted on 8 Apr 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Schémas multiniveaux pour les équations d'ondes en dimension 1

C. Calgaro*, J.-P. Chehab†, J. Laminie‡, E. Zahrouni§

8 avril 2008

Résumé

Nous proposons dans cet article de mettre en avant quelques idées pour la simulation numérique de plusieurs classes d'équations d'ondes dispersives (KdV, Benjamin-Ono) ou non (Kuramoto-Sivashinski) par des méthodes multiniveaux. Nous partons des idées initialement développés pour les équations dissipatives et en proposons une extension. Il en ressort que la présence d'une régularisation en temps est nécessaire pour pouvoir traiter de manière stable, et avec des schémas appropriés, les différentes échelles de la solution, préalablement générées à l'aide de méthodes hiérarchiques (inconnues incrémentales, ondelettes, Fourier).

*Laboratoire de Mathématiques Paul Painlevé, UMR 8524, Université de Lille 1, France, (calgaro@math.univ-lille1.fr), and EPI SIMPAF INRIA Lille NORD Europe

†LAMFA, UMR 6140, Université de Picardie Jules Verne, Amiens France (jean-paul.chehab@u-picardie.fr) and EPI SIMPAF INRIA Lille NORD Europe

‡Grimaag-Guadeloupe Campus de Fouillole B.P. 592 97157 Pointe à Pitre Cedex and Laboratoire de Mathématique Analyse Numérique et E.D.P. Université Paris Sud 91405 ORSAY CEDEX FRANCE (jacques.laminie@math.u-psud.fr)

§Département de Mathématiques, Faculté des sciences de Monastir, Boulevard de l'environnement, 5000 Monastir, Tunisie

Table des matières

1	Séparation des échelles	4
1.1	La décomposition en grandes et petites échelles	4
1.2	En différences finies (Inconnues incrémentales)	6
1.2.1	Principe	6
1.2.2	La hiérarchisation	6
1.2.3	Changement de variables	6
1.3	Inconnues incrémentales et compression des données	7
1.4	Bases interpolantes et Décomposition multi-échelles	10
1.4.1	Grilles dyadiques et schéma de subdivision	10
1.4.2	Les fonctions d'échelles et d'ondelettes	11
2	Le problème modèle et la discrétisation en espace et en temps	15
2.1	Discrétisation en espace	16
2.1.1	Différences finies	16
2.1.2	Ondelettes interpolantes	17
2.2	Discrétisation en temps	17
2.2.1	Schémas de type Crank-Nicholson	17
2.2.2	Schémas de type Runge-Kutta	22
3	Application à certaines équations d'ondes	24
3.1	L'équation de Korteweg de Vries (KDV)	24
3.1.1	Schéma de Crank-Nicholson (CN)	25
3.1.2	Schéma de Duràn Sanz-Serna (DSS)	26
3.1.3	Schéma classique RK43	27
3.1.4	Plusieurs schémas en temps avec séparation des échelles	28
3.2	L'équation de Benjamin Ono (BO)	32
3.2.1	Discrétisation en espace	34
3.2.2	Schémas en temps	34
3.2.3	Résultats numériques	35
3.3	L'équation de Kuramoto-Sivashinski (KSE)	35
3.3.1	Discrétisation du problème	36
3.3.2	Discrétisation en espace	36
3.3.3	Schémas en temps	36
3.3.4	Résultats numériques	36
4	Conclusion	43
5	Annexe	47
5.1	Schémas de discrétisation et d'interpolation	47
5.1.1	Les schémas complets	47
5.1.2	Formules d'interpolation pour les inconnues incrémentales et les interpo- lettes	47
5.1.3	Schémas aux différences pour les dérivées	48
5.2	Inconnues Incrémentales ℓ^2 orthogonales	49

Introduction

La simulation numérique de systèmes dynamiques met souvent en évidence la présence d'échelles (ou de structures) de tailles différentes ; on note canoniquement Y les grandes structures et Z les petites structures. Les Y sont associés à la partie principale de la solution, les Z à une partie fluctuante. Dans la simulation de la turbulence, les méthodes LES ou de sous-maillages proposent de traiter ces structures numériquement de manière différente, en s'appuyant par exemple sur une modélisation (relation de fermeture). Au milieu des années 80, et pour des systèmes dynamiques dissipatifs, les travaux de Temam *et al* [Tem97] ont permis de justifier mathématiquement la démarche de séparation des échelles (théorie des variétés inertielles). D'abord formulés dans un cadre spectral, les méthodes de Galerkin non-linéaires (GNL) ont été présentées comme un cadre numérique pour mettre en application la modélisation des Z par les Y . La méthode a été étendue par la suite à des situations plus générales, citons Marion-Temam [MT89, MT90] pour les éléments finis, Temam [CT91a, CT91b] pour les différences finies, Goubet [Gou93] pour les ondelettes.

Dans la pratique, la projection sur une variété inertielle (approximative) ne permet pas de mettre en avant l'efficacité de la démarche en termes de réduction de temps de calcul, comme l'a montré F. Pascal [Pas92] en éléments finis.

En fait, l'idée principale de la démarche consiste à traiter différemment les Y et les Z , c'est-à-dire à définir un schéma numérique différent pour les Y et pour les Z . Cette approche a donné lieu à de nouveaux types de schémas "multiniveaux en temps" : citons par exemples Debussche-Dubois-Temam [DDT95], C. Calgaro et J. Laminie en éléments finis (hiérarchiques) pour les équations de Burgers et de Navier-Stokes [CLT97, CDL98], Dubois-Jauberteau-Temam en spectral pour la simulation de la turbulence homogène [DJT98], Costa-Dettori-Gottlieb-Temam [CDGT01] pour Burgers en Fourier et Chebyshev, F. Pouit [Pou98], JP. Chehab et B. Costa [CC03, CC04] en différences finies pour Burgers, A. Debussche, J. Laminie et E. Zahrouni [DLZ05] en ondelettes et éléments finis pour Burgers.

Tous les travaux sus-cités s'appuient sur une décomposition *a priori* des inconnues en termes de grandes et de petites structures – les techniques utilisées à cet effet varient suivant le contexte, nous y reviendrons plus tard – et sur un traitement numérique différencié de celles-ci. Cette stratégie se justifie par un phénomène caractéristique des systèmes dissipatifs, à savoir le transfert de l'énergie de la solution des hauts vers les bas modes de Fourier, ce qui peut se voir également comme une propriété de régularisation.

La finalité de notre projet ici est d'appliquer cette approche à des équations d'ondes dispersives ou non et qui présentent des caractéristiques toutes autres. En particulier, certaines d'entre elles admettent des solutions localisées en espace (solitons) ou peuvent présenter des phénomènes d'explosion en temps fini ; dans ce dernier cas les transferts d'énergie des hauts modes vers les bas modes ne peuvent avoir lieu.

Nous considérons ici successivement quelques équations d'ondes 1D pour lesquelles nous proposons des schémas multiniveaux s'appuyant sur une décomposition de type Y-Z, en Fourier, en inconnues incrémentales en différences finies et en interpolettes suivant les cas ; l'utilisation des ondelettes interpolantes est motivée pour le développement de maillages adaptatifs et le calcul de solutions explosives très localisées en espace.

Notre travail est organisé comme suit : dans un premier temps nous rappelons quelques décompositions en espace / fréquences (Inconnues incrémentales, Interpolettes, Fourier) que nous utiliserons pour définir les différents niveaux d'échelles. Ensuite, pour un problème mo-

dèle assez général, incluant les équations de KdV et de Benjamin-Ono, nous proposons des schémas de discrétisation en espace et en temps vérifiant des propriétés de conservation d’invariants au niveau discret. Puis, plus particulièrement pour KdV, nous introduisons différents schémas multiniveaux de type Runge Kutta. L’approche de type GNL n’est pas concluante dans ce cas et nous proposons quelques pistes de résolutions adaptatives avec des techniques de seuillage. L’équation de Kuramoto-Sivashinski qui comporte des termes dissipatifs, présente en revanche des propriétés de régularisation, ce qui permet d’appliquer avec succès les techniques multiniveaux. Des propriétés de régularisation semblent donc être un préalable à l’application d’une approche multiniveaux et il serait à cet égard intéressant de considérer les équations faiblement amorties, telles que KdV [Ghi88b, Ghi94, Gou00, GR02] ou Schrödinger non linéaire (NLS)[Ghi88a, Gou96, AMC⁺08], pour lesquelles les solutions sont régularisées asymptotiquement : il s’agit-là d’une situation intermédiaire entre le cas dissipatif et celui dispersif.

1 Séparation des échelles

1.1 La décomposition en grandes et petites échelles

La simulation numérique de systèmes dynamiques met souvent en évidence la présence d’échelles (ou de structures) de tailles différentes, associées respectivement aux modes lents et modes rapides du flot. D’autre part, la stabilité des schémas numériques classiques est subordonnée à leur capacité à représenter les fréquences élevées de la solution. Ces schémas reposent sur un traitement uniforme de toutes les données ; la stabilité numérique est donc limitée par le comportement des hautes fréquences par rapport à la discrétisation considérée.

Un moyen d’augmenter la stabilité des schémas numériques et donc de pouvoir calculer plus précisément, mais aussi plus rapidement, la solution du problème pour les grand intervalles de temps consiste à introduire une décomposition des inconnues en termes de grandes et petites structures et de traiter celles-ci différemment dans le schéma numérique en temps. Plus précisément, la décomposition en grandes et petites structures consiste à réorganiser *a priori* les données en termes de partie principale et partie fluctuante de la solution. Il est à noter que cette décomposition diffère des décompositions LES (Large Eddies Simulations) $u = \bar{u} + \tilde{u}$ dans lesquelles la partie principale \bar{u} est bien de l’ordre de la solution physique u mais la partie fluctuante \tilde{u} est seulement de moyenne petite en temps. Dans la décomposition que nous considérerons, la partie fluctuante sera aussi petite en espace.

Lorsque les conditions aux limites sont périodiques, on approche les fonctions assez régulières par des séries de Fourier tronquées :

$$u \simeq \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i w_i$$

où les α_i sont des réels et les w_i les $2n$ premiers éléments d’une base hilbertienne. Nous avons alors évidemment

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{i=n+1}^{2n} \alpha_i w_i = Y + Z.$$

Les Y sont décrits par les petites longueurs d’ondes et, de par la convergence de la série, contiennent la majeure part de l’énergie. Les Z sont associés aux fréquences élevées et sont “petits” par rapport aux Y .

La mise en œuvre de cette décomposition s'effectue au moyen de FFT. Néanmoins, cette décomposition a deux inconvénients, d'une part elle ne s'applique qu'aux conditions aux limites périodiques et d'autre part les différentes échelles ne sont pas du tout localisées en espace, ce qui oblige à effectuer des calculs coûteux pour capter des phénomènes très localisés en espace, du type explosion de la solution en temps fini. Cette décomposition est parfaitement localisée en fréquence, mais pas du tout en espace.

Dans le cas non périodique, ou si on veut travailler localement en espace, les méthodes hiérarchiques offrent un compromis très intéressant pour séparer les échelles à la fois en fréquence et en espace. Ces méthodes hiérarchiques (inconnues incrémentales, ondelettes, bases hiérarchiques en éléments finis,...) reposent toutes sur le même schéma de construction. Tout d'abord, on considère plusieurs grilles de discrétisation en espace et l'on distingue les inconnues portées par la grille grossière de celles portées par les grilles complémentaires : la grille grossière ne peut représenter que les basses fréquences alors que les grilles fines complémentaires peuvent capter les modes élevés, en réalisant une séparation en fréquence de la solution. Dans un deuxième temps, on remplace les inconnues de grilles fines complémentaires par des nouvelles inconnues qui représentent localement l'erreur d'interpolation. On opère ainsi une séparation des échelles en espace. Nous détaillons plus bas dans cette section les différentes décompositions en différences finies et en ondelettes.

Si l'on omet pour l'instant un éventuel seuillage numérique, cette décomposition consiste en un changement de variables que l'on représente par une matrice de transfert S ; la transformation est en effet linéaire en l'absence de seuillage. La matrice S représente aussi bien une FFT, une transformée en ondelettes, qu'une matrice de transfert de base hiérarchiques ou d'inconnues incrémentales.

Plus précisément, si U est le vecteur contenant les approximations nodales de la solution, on définit \hat{U} par la relation

$$U = S\hat{U}$$

avec $\hat{U} = (Y, Z)^T$. Ici, Y correspond à l'approximation de la solution dans l'espace grossier, Y est donc de l'ordre de la solution physique, tandis que Z contient les corrections à la solution correspondants aux erreurs d'interpolation sur les grilles fines successives.

Considérons l'équation d'évolution non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t) &= L(t, u) + N(t, u), & x \in]0, \tau[, & t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in]0, \tau[, \end{cases} \quad (1.1)$$

où L (resp. N) est un opérateur linéaire (resp. non linéaire). Après discrétisation en espace, nous obtenons le système différentiel à m inconnues suivant :

$$\frac{dU}{dt} - L^{(h)}U = N^{(h)}(U), \quad (1.2)$$

$$U(0) = U_0 \in \mathbb{R}^m, \quad (1.3)$$

qui se réécrit en système couplé en Y et Z :

$$\frac{dY}{dt} - L_{11}^{(h)}Y - L_{12}^{(h)}Z = N_Y^{(h)}(Y, Z), \quad (1.4)$$

$$\frac{dZ}{dt} - L_{21}^{(h)}Y - L_{22}^{(h)}Z = N_Z^{(h)}(Y, Z), \quad (1.5)$$

Ici $L_{ij}^{(h)}$ désignent les blocs de la matrice $S^{-1}L^{(h)}S$ suivant la décomposition Y - Z :

$$S^{-1}L^{(h)}S = \begin{pmatrix} L_{11}^{(h)} & L_{12}^{(h)} \\ L_{21}^{(h)} & L_{22}^{(h)} \end{pmatrix}, \quad S^{-1}N^{(h)}(U) = \begin{pmatrix} N_Y^{(h)}(Y, Z) \\ N_Z^{(h)}(Y, Z) \end{pmatrix}$$

Enfin, on note Id (resp. Id_1, Id_2) la matrice identité de la même taille que la matrice $L^{(h)}$ (resp. $L_{11}^{(h)}, L_{22}^{(h)}$).

1.2 En différences finies (Inconnues incrémentales)

1.2.1 Principe

La construction des inconnues incrémentales s'effectue en deux étapes :

1. Hiérarchisation
2. Changement de variables (récursif)

1.2.2 La hiérarchisation

Considérons d'abord deux grilles. Soit h le pas de G_h , la grille la plus fine. On suppose pour simplifier que $G_{2h} \subset G_h$; cela n'est pas toujours le cas mais on peut se ramener à une situation similaire par *coarsening*, tel que proposé plus bas pour résoudre le problème de Stokes. La hiérarchisation consiste à réordonner les inconnues en rangeant d'abord celles de la grille la plus grossière G_{2h} , puis, successivement, celles des $G_h \setminus G_{2h}$, $j = 1, \dots, d$. On illustre ci-dessous ce réordonnement en dimensions 1 et 2 d'espace.

$$\cdot \quad o \quad \times \quad o \quad \times \quad o \quad \times \quad o \quad \times \quad o \quad \cdot$$

En dimension 2, si G_h est la grille fine composée des points (ih, jh) , $i, j = 1, \dots, 2N - 1$, alors les points de la grille grossière sont $(2ih, 2jh)$ comme ci-dessous

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & o & o & o & o & o & o & o \\ \cdot & o & \times & o & \times & o & \times & o \\ \cdot & o & o & o & o & o & o & o \\ \cdot & o & \times & o & \times & o & \times & o \\ \cdot & o & o & o & o & o & o & o \\ \cdot & o & \times & o & \times & o & \times & o \\ \cdot & o & o & o & o & o & o & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

1.2.3 Changement de variables

Lorsque deux niveaux de grilles sont utilisés, le changement de variables consiste à laisser inchangées les inconnues de la grille grossière et à remplacer celles de la grille complémentaire $G_h \setminus G_{2h}$ par une erreur d'interpolation :

$$Z = U_f - R \circ Y, \tag{1.6}$$

où $R : G_H \rightarrow G_h \setminus G_H$ est un opérateur d'interpolation d'ordre p . On parlera alors d'inconnues incrémentales d'ordre p . Quand plus de 2 niveaux de grille sont considérés, le changement de variables consiste à produire récursivement plusieurs blocs d'inconnues incrémentales et on a la relation

$$\begin{pmatrix} y \\ u_{f_1} \\ u_{f_2} \\ \vdots \\ u_{f_d} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}.$$

La matrice S du changement de variables est appelée *matrice de transfert*.

Exemple

Décrivons la construction des inconnues incrémentales (II) d'ordre 2. En dimension un, soit U_j , $j = 0, \dots, 2N - 1$ les inconnues nodales sur G_h . On pose

$$Z_{2j+1} = U_{2j+1} - \frac{1}{2}(U_{2j} + U_{2j+2}), j = 0, \dots, N - 1, \quad (1.7)$$

$$U_0 = U_{2N} = 0. \quad (1.8)$$

Les II sont donc définies comme des incréments (erreur d'interpolation) de U à la valeur moyenne des inconnues de la grille grossière voisins.

En dimension 2, on procède de manière analogue tout en distinguant 3 situations différentes :

$$\begin{array}{ccccc} \times & & & \times & \times \\ \circ & & \times & \circ & \times \\ \times & & & \times & \times \end{array}. \quad (1.9)$$

Les inconnues incrementales (associée à des conditions aux limites de Dirichlet homogène) sont donc définies par

$$\begin{aligned} z_{2i,2j+1} &= u_{2i,2j+1} - \frac{1}{2}(u_{2i,2j} + u_{2i,2j+2}), \\ z_{2i+1,2j} &= u_{2i+1,2j} - \frac{1}{2}(u_{2i,2j} + u_{2i+2,2j}), \\ z_{2i+1,2j+1} &= u_{2i+1,2j+1} - \frac{1}{4}(u_{2i,2j} + u_{2i+2,2j} + u_{2i,2j+2} + u_{2i+2,2j+2}), \end{aligned}$$

pour $i, j = 0, \dots, N - 1$ et $U_{\alpha,\beta} = 0$ si α ou $\beta \in \{0, 1\}$.

1.3 Inconnues incrémentales et compression des données

Bien évidemment, la formule de Taylor assure que les II de la j -ième grille sont en $\mathcal{O}(h_j^d)$, si d est l'ordre du schéma d'interpolation utilisé. Cette différence d'ordre de grandeur en composantes grossières et incémentales apparait à travers des estimations de type energie, dont le cadre sous-jacent est le problème de Poisson, voir [CT91a]. Dans Chehab-Miranville [CM98], nous proposons une construction générale des II sur un maillage non uniforme, en dimensions 1 et 2 d'espace. En particulier, Si l'on considère la solution du problème de Dirichlet sur le carré unité, on montre que pour deux niveaux de discrétisation on a la

Proposition 1

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} \{z_{2i+1,2j}^2 + z_{2i,2j+1}^2 + z_{2i+1,2j+1}^2\} \leq \frac{c}{\delta h} |f|_{L^2}^2,$$

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} (y_{2i+2,2j} - y_{2i,2j})^2 \leq \frac{c}{\delta h} |f|_{L^2}^2,$$

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} (y_{2i,2j+2} - y_{2i,2j})^2 \leq \frac{c}{\delta h} |f|_{L^2}^2,$$

où

$$h = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})(y_{j+1} - y_{j-1})},$$

$$\delta h = \min\left(\frac{\delta x}{\delta y}, \frac{\delta y}{\delta x}\right),$$

$$\delta x = \max(x_{i+1} - x_i), \quad \delta y = \max(y_{j+1} - y_j)$$

et c est une constante indépendante de la discrétisation.

Cela garantit donc que les z sont "petits" lorsque $\frac{h^2}{\delta h} \rightarrow 0$, quand $h \rightarrow 0$, c'est-à-dire quand le maillage utilisé n'est pas trop anisotrope. C'est le cas du maillage de type Chebyshev, utilisé par exemple pour simuler le problème de la cavité entraînée en formulation $\omega - \psi$, comme par exemple proposé par J. Shen [She91]. Ces estimations généralisent celles données dans Chen-Temam [CT91a] .

Bien entendu, des structures plus fines peuvent être générées en considérant non plus un schéma d'interpolation d'ordre 2 mais d'ordre plus élevé. Dans ce cas l'utilisation d'un schéma explicite nécessite de prendre en compte un nombre important d'inconnues pour interpoler les inconnues proches du bord. Pour palier à cette difficulté, on propose dans [Che98] d'utiliser des schémas compacts. Les schémas compacts (CS) sont des schémas implicites qui ont connu un regain d'intérêt pour la simulation de la turbulence, la résolution numérique de problèmes hyperboliques [CGA91] et le calcul de chocs [CS94] ; ils permettent d'atteindre une précision proche de celle du spectral en utilisant des différences finies, Lele [Lel92], et peuvent prendre en compte des conditions aux limites non périodiques. Ils ont été abondamment utilisés ces dernières années pour la simulation de problèmes de mécanique des fluides numériques, voir par exemple Liu-Wang [LW04].

Les schémas compacts approchent un opérateur discret par une fraction rationnelle ; ils sont donc implicites, ce qui permet de limiter la largeur de bande des points à prendre en compte tout en atteignant une haute précision. On écrit l'opérateur discret sous la forme

$$D = P^{-1}Q \tag{1.10}$$

où P , la partie implicite, est une matrice bande, tri ou penta diagonale, et Q une matrice de discrétisation de D à un ordre inférieur, contenant éventuellement la discrétisation des conditions aux limites ; on renvoie le lecteur à [Lel92, CM98] pour une construction générale.

Comme proposé dans [Che98], on peut adapter la construction des II aux conditions aux limites sous-jacentes au problème considéré, de sorte à s'affranchir d'effets de bord. Outre les conditions de type Dirichlet décrites jusqu'à présent, on peut envisager par exemple

- des conditions de Neumann
- des conditions périodiques.

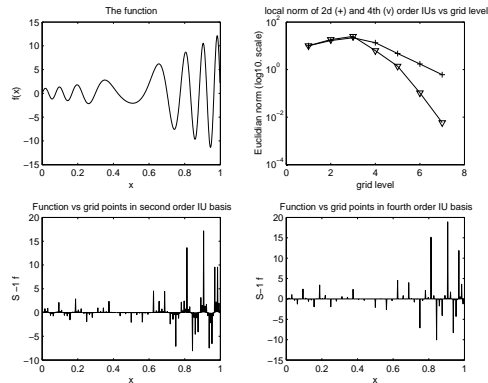


FIG. 1 – Compression des données en dimension 1

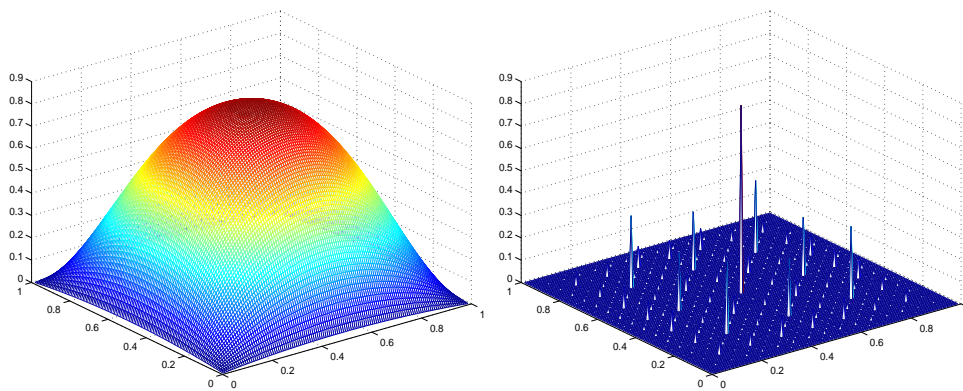


FIG. 2 – Compression des données en dimension 1. (a) La fonction

1.4 Bases interpolantes et Décomposition multi-échelles

1.4.1 Grilles dyadiques et schéma de subdivision

Pour tout entier $j \geq 0$, on considère la grille formée des points dyadiques,

$$\mathcal{G}_j = \{x_{j,k} = k/2^j \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}.$$

\mathcal{G}_j est dite grille de niveau j , réalise une subdivision équidistante de \mathbb{R} et pour tout entier $j \geq 0$, on a

$$\mathcal{G}_j \subset \mathcal{G}_{j+1}, \\ \mathcal{G}_{j+1} \setminus \mathcal{G}_j = \{x_{j+1,2k+1} = \frac{2k+1}{2^{j+1}} \text{ pour } k \in \mathbb{N}\}.$$

On remarque qu'un nœud de \mathcal{G}_{j+1} est soit un nœud de \mathcal{G}_j soit le milieu de deux nœuds successifs de \mathcal{G}_j .

Donné la solution d'un problème aux limites, elle est interpolée sur les grilles \mathcal{G}_j par des fonctions périodiques et polynômiales par morceaux. Plus précisément, cette solution est approchée par des fonctions de sous espaces de dimension finie engendrés par des fonctions périodiques, régulières et polynômiales par morceaux. Ces fonctions sont générées par des opérations de dilatation et de translation de la périodisé d'une unique fonction φ à support compact, régulière, vérifiant une 'equation à deux échelles. De plus φ est interpolante sur \mathbb{Z} ,

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \varphi(k) = \delta_{k,0}. \quad (1.11)$$

De telle fonctions sont construites en générale par les méthodes d'analyse multi-résolution. La fonction φ est dite fonction d'échelle interpolante.

Dans notre travail on considère des fonctions φ construitent par Deslauriers-Dubuc dans [MDD93] par le schéma de subdivision dont il est utile de rappeler le principe de fonctionnement. Ce schéma nous servira dans la suite pour réaliser les opérations d'analyse et de synthèse de la solution.

Soit f une fonction définie continue sur \mathbb{R} et soit la suite $(f_{j,k})_k$ définie par $f_{j,k} = f(x_{j,k})$. Etant donné, un entier M **pair**, on construit la suite $(f_{j+1,k})_k$ approchant f aux points de \mathcal{G}_{j+1} par le schéma suivant :

$$f_{j+1,2k} = f_{j,k}, \quad f_{j+1,2k+1} = P_{j+1,2k+1}(x_{j+1,2k+1}), \quad (1.12)$$

où $P_{j+1,2k+1}$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par

$$-\frac{M}{2} + 1 \leq l \leq \frac{M}{2}, \quad P_{j+1,2k+1}(x_{j,k+l}) = f_{j,k+l}. \quad (1.13)$$

Le polynôme $P_{j+1,2k+1}$ nous permet d'évaluer la valeur de f au point $x_{j+1,2k+1} = \frac{2k+1}{2^{j+1}}$ par interpolation de valeurs approchées de f sur la grille moins fine \mathcal{G}_j .

On a alors d'après (1.13),

$$P_{j+1,2k+1}(x) = \sum_{l=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} f_{j,k+l} \prod_{r \neq l} \frac{x - x_{j,k+r}}{x_{j,k+r} - x_{j,k+l}} \quad (1.14)$$

Le fait que les points de \mathcal{G}_j sont équadistants on a

$$f_{j+1,2k+1} = \sum_{l=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} h_l f_{j,k+l} \quad (1.15)$$

où les coefficients h_l sont calculés en prenant $x = x_{j+1,2k+1}$ dans (1.14), on a pour $-\frac{M}{2} < l \leq \frac{M}{2}$,

$$h_l = (-1)^{\frac{p}{2}+l-1} \frac{\prod_{i=0}^{p-1} (i - \frac{p}{2} + \frac{1}{2})}{(l - \frac{1}{2})(\frac{p}{2} + l - 1)!(\frac{p}{2} - l)!}. \quad (1.16)$$

1.4.2 Les fonctions d'échelles et d'ondelettes

On définit l'opérateur d'interpolation I_j sur la grille \mathcal{G}_j , en utilisant une fonction φ interpolante que l'on construit de proche en proche sur les grilles \mathcal{G}_j de proches en proches à l'aide du schéma de subdivision. Étant donné un entier M pair, on définit $f_{0,k} = \varphi(k) = \delta_{k,0}$. Pour $j \geq 1$, les valeurs de φ sur \mathcal{G}_j sont données par la suite $(f_{j,k})$ définie par (1.12). Donc, par construction on a,

$$\forall j \geq 0, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi(x_{j+1,2k+1}) = \sum_{r=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} h_r \varphi(x_{j,k+r}). \quad (1.17)$$

La fonction φ ainsi construite sur les rationnels s'étend d'une manière unique par continuité à \mathbb{R} . En outre φ est une fonction d'échelle interpolante, à support compact,

$$\text{supp}(\varphi) = [-M + 1, M - 1] \quad (1.18)$$

vérifie une relation à deux échelles,

$$\varphi(x) = \sum_{r=-M+1}^{M-1} g_r \varphi(2x - r). \quad (1.19)$$

Les coefficients g_r sont donnés à partir de h_r définies par (1.16),

$$g_r = \begin{cases} 1 & r = 0, \\ 0 & r \neq 0 \quad r \text{ est pair}, \\ h_{\frac{r-1}{2}} & r \text{ est impair}. \end{cases}$$

La fonction φ ainsi construite est dans \mathcal{C}^α , la classe de régularité de Hölder. La régularité de telle fonction est étudiée dans [DD89] et d'une manière générale dans le livre de Daubechies [Dau93].

φ génère localement les polynômes de degré $\leq M - 1$, ce qui revient à dire pour tout polynôme P de degré $\leq M - 1$ il existe des coefficients $(p_k)_k$ telles que

$$P = \sum_k p_k \varphi(\cdot - k).$$

On pose $\varphi_{j,k}(x) = \varphi(2^j x - k)$. On remarque que

$$\forall k, k' \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_{j,k}(x_{j,k'}) = \delta_{k,k'}. \quad (1.20)$$

La famille $(\varphi_{j,k})$ est dite alors interpolante sur la grille \mathcal{G}_j . L'opérateur I_j peut-être défini par

$$I_j(u) = \sum_k u(x_{j,k}) \varphi_{j,k},$$

de manière à ce que,

$$I_j(u)(x_{j,k}) = u(x_{j,k}).$$

A la fonction d'échelle φ est associée la fonction

$$\psi(x) = \varphi(2x - 1)$$

est appelée fonction ondelette. On pose $\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k)$.

$$\forall k, k' \in \mathbb{Z} \quad \psi_{j,k}(x_{j,k'}) = 0 \quad (1.21)$$

$$\forall k, k' \in \mathbb{Z} \quad \psi_{j,k}(x_{j+1,2k'+1}) = \delta_{k,k'}. \quad (1.22)$$

Pour décrire les algorithmes d'analyse et de synthèse que nous procure cette famille de fonction, on introduit les suites de sous-espaces vectoriels engendrées par l'adhérence de ses combinaisons linéaires finies des $\varphi_{j,k}$ et $\psi_{j,k}$,

$$V_j = \overline{\text{Vect} \{ \varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z} \}}^{L^2},$$

$$W_j = \overline{\text{Vect} \{ \psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z} \}}^{L^2}.$$

On a alors grâce à (1.19) et (1.21-1.22)

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Si $u \in V_{j+1}$ alors on a d'une part,

$$u(x) = \sum_k \alpha_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}(x) \quad (1.23)$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} u(x) &= y(x) + z(x), \\ y(x) &= \sum_k \alpha_{j,k} \varphi_{j,k}(x), \\ z(x) &= \sum_k \beta_{j,k} \psi_{j,k}(x). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Le passage de (1.23) à (1.24) est dit schéma de décomposition ou d'analyse. On a

$$\begin{aligned} u(x_{j,k}) &= \alpha_{j+1,2k}, \\ &= \alpha_{j,k}, \end{aligned}$$

car les fonctions $\psi_{j,k}$ s'annulent aux points de la forme $x_{j+1,2k}$.

$$\begin{aligned} u(x_{j+1,2k+1}) &= \alpha_{j+1,2k+1}, \\ &= y(x_{j+1,2k+1}) + z(x_{j+1,2k+1}). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Or la famille $\psi_{j,k}$ est interpolante aux points $x_{j+1,2k+1}$ et donc

$$z(x_{j+1,2k+1}) = \beta_{j,k}.$$

Grâce à (1.14), on a

$$y(x_{j+1,2k+1}) = \sum_{r=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} h_r \alpha_{j,k+r}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \alpha_{j,k} &= \alpha_{j+1,2k}, \\ \beta_{j,k} &= \alpha_{j+1,2k+1} - \sum_{r=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} h_r \alpha_{j,k+r}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

La collection des familles

$$(\varphi_{j_0,k})_{k \in \mathbf{Z}} \bigcup (\psi_{j,k})_{j \geq j_0, k \in \mathbf{Z}} \quad (1.27)$$

permet de décomposer des fonctions continues. Tout d'abord, pour chaque fonction continue f , on définit les suites

$$\alpha_{j,k} = f(x_{j,k}) \quad \beta_{j,k} = \alpha_{j+1,2k+1} - \sum_{r=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} h_r f(x_{j,k+r}). \quad (1.28)$$

On a alors le résultat suivant [Don92],

Théorème 1 *Soit φ une fonction interpolante d'ordre M . Considérons une fonction f qui est la somme d'un polynôme de degré $\leq M-1$ et d'une fonction continue et nulle à l'infini. Alors avec les coefficients $\alpha_{j,k}$ et $\beta_{j,k}$ définie par (1.28) et pour tout niveau grossier $j_0 \geq 0$ on a,*

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{j_0,k} \varphi_{j_0,k} + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k} \quad (1.29)$$

avec une convergence en norme L^∞ . ■

On rappelle que les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ ne s'injectent dans les espaces des fonctions continues que pour $s > \frac{1}{2}$.

Pour tout entier M , on note α_M l'indice de régularité de la fonction d'échelle φ de Deslauriers et Dubuc d'ordre M .

Théorème 2 *Si le $\min(\alpha(M), M) > \sigma > \frac{1}{2}$ alors*

$$\|f\|_{H^\sigma} \sim (\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\alpha_{j_0,k}|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{j \geq j_0} 2^{j\sigma} \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\beta_{j,k}|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.30)$$

■

Les propriétés d'approximation dans les espaces fonctionnels et de localisation sont données dans un article par D. Donoho sur les ondelettes interpolantes.

Les fonctions φ et ψ ne vérifient les conditions aux limites périodiques. Pour cela, on considère alors les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi_{j,k}^{per}(x) &= \sum_l \varphi_{j,k}(x-l), \\ \psi_{j,k}^{per}(x) &= \sum_l \psi_{j,k}(x-l)\end{aligned}$$

On vérifie alors que

$$\begin{aligned}\varphi_{j,k}^{per}(x+1) &= \varphi_{j,k}^{per}(x), \\ \varphi_{j,k+2^j}^{per}(x) &= \varphi_{j,k}^{per}(x).\end{aligned}$$

Il en est de même pour les $\psi_{j,k}^{per}$. De plus, il est clair que les fonctions $\varphi_{j,k}^{per}$ vérifient l'équation de dilatation (1.19) et sont interpolantes sur \mathcal{G}_j et les fonctions $\psi_{j,k}^{per}$ s'annulent aux points \mathcal{G}_j et sont interpolantes aux $\mathcal{G}_{j+1} \setminus \mathcal{G}_j$. On considère alors des sous espaces V_j et W_j ,

$$\begin{aligned}V_j^{per} &= \text{Vect} \left\{ \varphi_{j,k}, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\} \right\}, \\ W_j^{per} &= \text{Vect} \left\{ \psi_{j,k}, k \in \{1, \dots, 2^j\} \right\}.\end{aligned}$$

1. V_j^{per} et W_j^{per} sont des sous-espaces de dimension 2^j .
2. On a alors les mêmes algorithmes d'analyse et de synthèse qui sont décrits par (1.26).
3. Les familles de fonctions périodiques, permettent d'obtenir l'analogue du théorème 2.

$$(\varphi_{j_0,k}^{per})_{k \in \mathbf{Z}} \bigcup (\psi_{j,k}^{per})_{j \geq j_0, k \in \mathbf{Z}} \quad (1.31)$$

Pour plus de détails concernant les analyses multi-résolutions et les bases d'ondelettes qui s'y rattachent, voir [Mey97].

2 Le problème modèle et la discrétisation en espace et en temps

Nous détaillons ici, pour le problème (1.1), la semi-discrétisation en espace puis celle en temps des opérateurs linéaires et non linéaires. On établit le résultat suivant

Lemme 1 *On suppose que (1.1) admet une solution régulière et qu'il peut se réécrire sous la forme*

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}u) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F(u)}{\partial u} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.32)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.33)$$

posée sur $\Omega = \mathbb{R}$ ou bien avec des conditions aux limites périodiques si le domaine est fini, i.e. $\Omega =]0, \tau[$. On suppose que \mathcal{L} est un opérateur linéaire auto adjoint qui commute avec $\frac{\partial}{\partial x}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(., t) dx &= \int_{\Omega} u(., 0) dx, \\ \int_{\Omega} u^2(., t) dx &= \int_{\Omega} u^2(., 0) dx, \\ \int_{\Omega} G(u)(., t) dx &= \int_{\Omega} G(u)(., 0) dx, \end{aligned}$$

avec $G(u) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}u, u \rangle + F(u)$.

Preuve. La forme conservative de l'équation donne automatiquement la conservation de la masse. Pour la conservation de la norme L^2 , compte tenu des conditions aux limites, remarquons que, d'une part

$$\langle \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}u), u \rangle = \langle \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x}, u \rangle = \langle \frac{\partial u}{\partial x}, \mathcal{L}^T u \rangle = - \langle u, \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}^T u) \rangle = - \langle \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}u), u \rangle.$$

Ainsi $\langle \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}u), u \rangle = 0$. D'autre part,

$$\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F(u)}{\partial u}, u \rangle = - \langle \frac{\partial F(u)}{\partial u}, \frac{\partial u}{\partial x} \rangle = - \langle \frac{\partial F(u)}{\partial x}, 1 \rangle = 0.$$

En vertu des hypothèses, on peut écrire l'équation sous la forme

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(u)}{\partial u} \right) = 0.$$

En prenant le produit scalaire dans L^2 de l'équation avec $\frac{\partial G(u)}{\partial u}$, il vient

$$0 = \langle u_t, \frac{\partial G(u)}{\partial u} \rangle + \langle \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(u)}{\partial u} \right), \frac{\partial G(u)}{\partial u} \rangle = \langle u_t, \frac{\partial G(u)}{\partial u} \rangle = \frac{d}{dt} \int G(u) dx.$$

■

On observe que les termes linéaires et non-linéaires des équations de KdV ou de Benjamin-Ono (généralisées ou non) satisfont les hypothèses du Lemme 1 ; en particulier on peut réécrire $N(u) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F(u)}{\partial u}$ avec $F(u) = \frac{1}{(p+1)(p+2)} u^{p+2}$.

Nous pouvons établir un résultat analogue pour les équations de type Schrödinger. Nous avons le

Lemme 2 *On suppose que (1.1) peut se réécrire sous la forme*

$$u_t + i \left(\mathcal{L}u + \frac{\partial F(u)}{\partial u} \right) = 0, x \in \Omega, \quad (2.34)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \quad (2.35)$$

posée sur $\Omega = \mathbb{R}$ ou bien avec des conditions aux limites périodiques si le domaine est fini, i.e. $\Omega =]0, \tau[$. Ici u est à valeurs complexes. On suppose que \mathcal{L} est un opérateur linéaire autoadjoint et que $F(\cdot)$ est à valeurs réelles. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(\cdot, t) \, dx &= \int_{\Omega} u(\cdot, 0) \, dx, \\ \int_{\Omega} u^2(\cdot, t) \, dx &= \int_{\Omega} u^2(\cdot, 0) \, dx, \\ \int_{\Omega} G(u)(\cdot, t) \, dx &= \int_{\Omega} G(u)(\cdot, 0) \, dx, \end{aligned}$$

avec $G(u) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}u, u \rangle + F(u)$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire hermitien.

Preuve. La preuve est analogue à celle du lemme 1. ■

2.1 Discrétisation en espace

Lorsque la simulation demande une grande précision, en espace notamment, il est possible d'utiliser plusieurs schémas d'ordre différent pour discrétiser en espace les termes linéaires et non linéaires.

Pour tout entier $j \geq 0$, noté $N_j = 2^j$, on considère la grille formée des points dyadiques,

$$\mathcal{G}_j = \{x_{j,k} = k/2^j \text{ pour } k = 0, \dots, N_j\}.$$

\mathcal{G}_j est dite grille de niveau j , réalise une subdivision équidistante de $]0, \tau[$ et pour tout entier $j \geq 0$, on a

$$\mathcal{G}_j \subset \mathcal{G}_{j+1}, \\ \mathcal{G}_{j+1} \setminus \mathcal{G}_j = \{x_{j+1,2k+1} = \frac{2k+1}{2^{j+1}} \text{ pour } k = 0, \dots, N_j\}.$$

On remarque qu'un nœud de \mathcal{G}_{j+1} est soit un nœud de \mathcal{G}_j soit le milieu de deux nœuds successifs de \mathcal{G}_j .

2.1.1 Différences finies

On considère alors une solution $u = u(t, x)$ de (1.1) que l'on suppose assez régulière de manière à ce qu'il est possible d'approcher pour tout $t \geq 0$, la solution $u(t, x)$ par $U_j(t, x_{j,k}) \in \mathbb{R}^{N_j+1}$ où j désigne le niveau de discrétisation en espace.

La fonction approchée $U_j(t, \cdot)$ est en fait définie par un système d'E.D.O.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} U_j(t) = L^{(j)}(t, U_j) + N^{(j)}(t, U_j) \\ U_j(0) = U_{0,j} \end{cases} \quad (2.36)$$

que l'on obtient en écrivant (1.1) aux points $(x_{j,k})$ et en effectuant des développements de Taylor adéquats. Ici $L^{(j)}$ et $N^{(j)}$ sont les opérateurs L et N discrétisés sur la grille de niveau j .

2.1.2 Ondelettes interpolantes

On considère alors une solution $u = u(t, x)$ de (1.1) que l'on suppose assez régulière de manière à ce qu'il est possible d'approcher pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto u(t, x)$ par une fonction $u_j(t, \cdot) : V_j \rightarrow V_j$ telle que

$$\forall k = 0, \dots, 2^j - 1, \quad u_j(t, x_{j,k}) \sim u(t, x_{j,k}).$$

On rappelle que si l'espace fonctionnel V_j est engendré par une base interpolante, on peut écrire

$$u_j(t, x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} U_j(t, x_{j,k}) \varphi_{j,k}.$$

La fonction approchée $u_j(t, \cdot)$ est en fait définie par le système d'E.D.O. 2.36 que l'on obtient en écrivant (1.1) aux points $(x_{j,k})$ et en effectuant des développements de Taylor adéquats.

Pour tout entier i , on définit une approximation de la dérivée partielle $\frac{\partial^i}{\partial x^i}$ aux points de la grille dyadique \mathcal{G}_j , par un opérateur aux différences finies centrées d'ordre M , voir annexe.

2.2 Discrétisation en temps

Donnée une discrétisation de l'intervalle de temps de simulation $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T$, on note pour tout n , $0 \leq n \leq N - 1$, $k_n = t_{n+1} - t_n$ le pas de discrétisation en temps. Dans toute la suite, pour les vecteurs solution discrète on néglige l'indice j du niveau de discrétisation en espace.

2.2.1 Schémas de type Crank-Nicholson

Il existe plusieurs versions de ce schéma.

Schéma de Crank-Nicholson (CN) :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k_n} - \frac{1}{2} L^{(h)}(U^n + U^{n+1}) = \frac{1}{2} (N^{(h)}(U^n) + N^{(h)}(U^{n+1})) \quad (2.37)$$

Schéma de Duràn Sanz-Serna (DSS), [DSS00] :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k_n} - \frac{1}{2} L^{(h)}(U^n + U^{n+1}) = N^{(h)}\left(\frac{U^n + U^{n+1}}{2}\right) \quad (2.38)$$

Nous considérons également un troisième schéma, inspiré de celui proposé par Delfour, Fortin et Payre [DFP81] pour l'équation de Schrödinger. Il permet de conserver le troisième invariant (énergie).

Schéma de Delfour-Fortin-Payre (DFP) :

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k_n} - \frac{1}{2} L^{(h)}(U^n + U^{n+1}) = (F^{(h)}(U^{n+1}) - F^{(h)}(U^n)) ./ (U^{n+1} - U^n) \quad (2.39)$$

le symbole $./$ désignant la division ponctuelle, composantes par composantes.

Ces trois schémas sont inconditionnellement stables mais U^{n+1} est défini comme solution d'un problème non linéaire. Comme proposé dans Bona [Bon, Wor91, BDOM95, BDK86], on résout ce système à chaque pas de temps par quelques itérations de point fixe (2 ou 3 suffisent).

Schéma (CN) et point fixe

Poser	$v_0 = U^n, k = 0$ jusqu'à convergence
Calculer	$v_{k+1} = (Id - k_n/2 L^{(h)})^{-1} \left((Id + k_n/2 L^{(h)})U^n + \frac{k_n}{2}(N^{(h)}(U^n) + N^{(h)}(v_k)) \right)$ $k = k + 1$

Le schéma de point fixe pour (DSS) (resp. (DFP)) s'écrit de façon similaire, en remplaçant $\frac{1}{2}(N^{(h)}(U^n) + N^{(h)}(v_k))$ par $N^{(h)}(\frac{U^n + v_k}{2})$ (resp. par $(F^{(h)}(v_k) - F^{(h)}(U^n))./(v_k - U^n)$).

Schéma de Crank-Nicholson et Splitting

La décomposition en grandes et petites échelles permet de résoudre itérativement ces problèmes de point fixe en Y et en Z par une méthode de type Gauss-Seidel non-linéaire.

Schéma (CN) et point fixe en Y et en Z

Poser	$(Y^n, Z^n)^T = S^{-1}U^n, v_0 = Y^n, w_0 = Z^n$
Calculer	$(nly_0, nlz_0)^T = S^{-1}N^{(h)}(U^n)$ jusqu'à convergence
Calculer	$(nly_k, nlz_k)^T = S^{-1}N^{(h)}(S\hat{u}_k), \hat{u}_k = (v_k, w_k)^T$
Calculer	$v_{k+1} = (Id_1 - k_n/2L_{11}^{(h)})^{-1} \left((Id_1 + k_n/2L_{11}^{(h)})Y^n + \frac{k_n}{2}(nly_0 + nly_k + L_{12}^{(h)}(w_0 + w_k)) \right)$
Calculer	$w_{k+1} = (Id_2 - k_n/2L_{22}^{(h)})^{-1} \left((Id_2 + k_n/2L_{22}^{(h)})Z^n + \frac{k_n}{2}(nlz_0 + nlz_k + L_{21}^{(h)}(v_0 + v_k)) \right)$ $k = k + 1$
Définir	$U^{n+1} = S(v_k, w_k)^T$

Remarque 1 Sur la conservation numérique des invariants.

La moyenne est conservée en Y et en Z respectivement. En effet, prenons-là nulle pour simplifier. Nous avons

$$\sum_i U_i = 0 \iff \sum_i (U_c)_i + \sum_i (U_f)_i = 0 \text{ avec } U = (U_c, U_f)^T$$

Or

$$\begin{pmatrix} U_c \\ U_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix},$$

on a donc

$$0 = \sum_i Y_i + \sum_i Z_i + \sum_i (BY)_i$$

Or $\sum (BY)_i = \sum Y_i$ (propriétés d'interpolation de B). Il en découle que

$$2 \sum_i Y_i = - \sum_i Z_i.$$

Ce résultat reste vrai indépendamment de la définition de Z , dès que l'on utilise un schéma explicite, ainsi

$$\sum Y = \mathcal{O}(h^{2p-1})$$

pour des IUs d'ordre $2p$.

Dans le cas des inconnues incrémentales orthogonales (voir annexe) ou des ondelettes orthogonales, on a la relation

$$S^T S = Id.$$

Si l'on note $S^{-1}U = \hat{U}$ et en prenant le produit scalaire euclidien de 1.2 avec U on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{d\|U\|^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\|\hat{U}\|^2}{dt}$$

La conservation de la norme L^2 pourra donc être contrôlée niveau de grille par niveau de grille.

$$\langle L^{(h)}(U), U \rangle = \langle L^{(h)}(SS^{-1}U), SS^{-1}U \rangle = \langle L^{(h)}(S\hat{U}), S\hat{U} \rangle = \langle (S^T L^{(h)} S)\hat{U}, \hat{U} \rangle = 0.$$

La structure antisymétrique de $L^{(h)}$ est conservée, ce n'est pas le cas en général où la matrice est $(S^{-1}L^{(h)}S)$ au lieu de $(S^T L^{(h)}S)$ ici.

A la manière des méthodes (pseudo)spectrales le terme non linéaire est évalué dans la base "physique" i.e. nodale.

En général le schéma de Crank-Nicholson ne permet pas de conserver le deuxième invariant (norme L^2) de la solution. En revanche, dans le schéma de Durán Sanz-Serna 2.38, on pourra définir l'opérateur non-linéaire discret $N^{(h)}$ de sorte à ce que les premiers invariants soient conservés au niveau discret. Nous allons décrire comment construire l'opérateur non-linéaire $N^{(h)}$ afin de conserver aussi le deuxième invariant, la norme L^2 de la solution.

Partons tout d'abord de la semi discrétisation en temps de l'équation (2.32). On établit le résultat suivant :

Lemme 3 Soit l'équation d'évolution

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}u) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F(u)}{\partial u} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.40)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.41)$$

On fait les hypothèses du lemme (1). Alors, le schéma de Durán Sanz-Serna (DSS) appliqué à l'équation semi-discrétisée en temps conserve la masse et la norme L^2 .

Preuve. Le schéma (DSS) pour l'équation semi-discrétisée en temps s'écrit

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k_n} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}u^n + \mathcal{L}u^{n+1}) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{u^n + u^{n+1}}{2} \right) = 0.$$

En prenant le produit scalaire dans L^2 de chaque terme de l'équation avec $w(x) := 1$ (respectivement avec $w = \frac{u^n + u^{n+1}}{2}$), on obtient la conservation de la masse (respectivement de la norme L^2).

Remarquons que le troisième invariant n'est conservé qu'à l'ordre 2. En effet, avec les mêmes notations, on considère le produit scalaire de l'équation avec le vecteur

$$\frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right).$$

On obtient

$$\left\langle \frac{u^{n+1} - u^n}{k_n}, \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) \right\rangle = 0.$$

Or

$$G(u^{n+1}) = G\left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2}\right) + \left\langle \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right), \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{2} \right) \right\rangle + \mathcal{O}(\| \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \|^2)$$

et

$$G(u^n) = G\left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2}\right) - \left\langle \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right), \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{2} \right) \right\rangle + \mathcal{O}(\| \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \|^2)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{G(u^{n+1}) - G(u^n)}{k_n} &= \left\langle \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right), \frac{u^{n+1} - u^n}{k_n} \right\rangle + \mathcal{O}(\| \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \|^2) \\ &= \mathcal{O}(\| \frac{u^{n+1} - u^n}{2} \|^2). \end{aligned}$$

■

Maintenant, on peut établir la conservation de la masse et de la norme L^2 discrètes. En prenant le produit scalaire discret de l'équation 2.38 avec le vecteur $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{N_j+1}$ dont toutes les composantes sont égales à 1, on obtient pour tout $n \geq 0$

$$\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{k_n}, \mathbf{1} \right\rangle = \sum_k U_k^{n+1} h_j - \sum_k U_k^n h_j,$$

et, par anti-symétrie de $L^{(h)}$,

$$\left\langle L^{(h)} \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right), \mathbf{1} \right\rangle = 0.$$

Enfin,

$$\left\langle N^{(h)}(W), \mathbf{1} \right\rangle = 0, \quad \forall W \in \mathbb{R}^{N_j+1},$$

dès que $N^{(h)}$ est une discrétisation du terme non linéaire écrit sous forme conservative ; on pourra écrire :

$$N^{(h)}(U) = D_x(D_U(F^{(h)}(U))),$$

étant D_y une approximation de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial y}$ par un schéma aux différences, avec $y = x$ ou $y = U$. Afin d'obtenir la conservation de la norme L^2 discrète, on prend le produit scalaire discret de 2.38 avec $\frac{U^{n+1} + U^n}{2}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{k_n}, \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right\rangle &+ \left\langle L^{(h)} \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right), \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right\rangle \\ &+ \left\langle N^{(h)} \left(\frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right), \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

avec

$$\left\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{k_n}, \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \right\rangle = \frac{|u^{n+1}|^2 - |u^n|^2}{2k_n},$$

et, par anti-symétrie de $L^{(h)}$,

$$\langle L^{(h)}(\frac{U^{n+1} + U^n}{2}), \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \rangle = 0.$$

La conservation de la norme L^2 équivaut à imposer

$$\langle N^{(h)}(\frac{U^{n+1} + U^n}{2}), \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \rangle = 0,$$

c'est-à-dire

$$\langle N^{(h)}(W), W \rangle = 0, \quad \forall W \in \mathbb{R}^{N_j+1}.$$

En utilisant les notations précédentes, on a :

$$\begin{aligned} \langle N^{(h)}(W), W \rangle &= \langle D_x(D_W(F^{(h)}(W))), W \rangle \\ &= - \langle D_W(F^{(h)}(W)), D_x W \rangle \\ &= - \langle D_x F^{(h)}(W), \mathbf{1} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 2 *Le schéma DSS préserve numériquement le second invariant mais n'est en général que d'ordre 1 en espace. En effet, en approchant $D_W(F^{(h)}(W))_i$ par $\frac{F^{(h)}(W)_{i+1} - F^{(h)}(W)_{i-1}}{W_{i+1} - W_{i-1}}$, nous obtenons, dans le cas d'une nonlinéarité en $u^p u_x$:*

$$D_W(F^{(h)}(W))_i = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \frac{W_{i+1}^{p+2} - W_{i-1}^{p+2}}{W_{i+1} - W_{i-1}} = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \sum_{j=0}^{p+1} W_{i+1}^{p+1-j} W_{i-1}^j$$

Un développement de Taylor en W_i montre qu'il s'agit d'une formule d'ordre 1.

Nous pouvons établir un résultat analogue pour le schéma de Delfour, Fortin et Payre (DFP) où cette fois-ci le premier et le troisième invariants sont exactement conservés, le second l'étant numériquement au second ordre.

Lemme 4 *Le Schéma (DFP) 2.39 conserve le premier et le troisième invariant.*

Preuve. Le schéma (DFP) complètement discrétisé s'écrit

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k_n} + D_x \left(\frac{1}{2} (L^{(h)} U^{n+1} + L^{(h)} U^n) + (F^{(h)}(U^{n+1}) - F^{(h)}(U^n)) ./ (U^{n+1} - U^n) \right) = 0$$

La forme conservative assure la conservation du premier invariant. Pour le troisième, on considère la produit scalaire de ce système avec le vecteur $\frac{1}{2} (L^{(h)} U^{n+1} + L^{(h)} U^n) + (F^{(h)}(U^{n+1}) - F^{(h)}(U^n)) ./ (U^{n+1} - U^n)$. Il vient

$$\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{k_n}, \frac{1}{2} (L^{(h)} U^{n+1} + L^{(h)} U^n) + (F^{(h)}(U^{n+1}) - F^{(h)}(U^n)) ./ (U^{n+1} - U^n) \rangle = 0.$$

Or

$$\langle \frac{U^{n+1} - U^n}{k_n}, \frac{1}{2} (L^{(h)} U^{n+1} + L^{(h)} U^n) \rangle = \frac{1}{2k_n} \left(\langle L^{(h)} U^{n+1}, U^{n+1} \rangle - \langle L^{(h)} U^n, U^n \rangle \right),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
& < \frac{U^{n+1} - U^n}{k_n}, (F^{(h)}(U^{n+1}) - F^{(h)}(U^n)) ./ (U^{n+1} - U^n) > \\
&= \sum_k \frac{U_k^{n+1} - U_k^n}{k_n} \frac{(F^{(h)}(U^{n+1}))_k - (F^{(h)}(U^n))_k}{U_k^{n+1} - U_k^n} \\
&= \frac{1}{k_n} \sum_k (F^{(h)}(U^{n+1}))_k - \sum_k (F^{(h)}(U^n))_k.
\end{aligned}$$

En sommant ces deux identités et en multipliant par h_j , le pas en espace, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_k (F^{(h)}(U^{n+1}))_k h_j + \frac{1}{2} \sum_k L^{(h)} U_k^{n+1} U_k^{n+1} h_j &= \sum_k (F^{(h)}(U^n))_k h_j \\
&+ \frac{1}{2} \sum_k L^{(h)} U_k^n U_k^n h_j,
\end{aligned}$$

soit

$$\sum_k (G^{(h)}(U^{n+1}))_k h_j = \sum_k (G^{(h)}(U^n))_k h_j.$$

Ceci ne traduit rien d'autre que la conservation de $\int G(u) dx$ au niveau discret, où l'intégrale est approché par une formule des rectangles. ■

2.2.2 Schémas de type Runge-Kutta

Nous considérerons les méthodes de Runge-Kutta à 4 niveaux : RK43, qui est semi-implicite A-stable d'ordre 3, et RK4, qui est explicite A-stable d'ordre 4. Elles sont respectivement décrites à l'aide de tableaux suivants :

0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	
1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

0	0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Soit U^0 une approximation de la solution initiale $u(t = 0, x_{j,k})$, alors pour tout $n \geq 0$, l'approximation U^{n+1} de la solution $u(t_{n+1}, x_{j,k})$ sera calculée par l'un des schémas présentés ci-dessous.

Schéma classique RK43

Le schéma classique RK43

Poser	$v_1 = U^n$
Calculer	$nl_1 = N^{(h)}(v_1)$
Calculer	$v_2 = (Id - k_n/3 L^{(h)})^{-1}((Id + k_n/6 L^{(h)})v_1 + k_n/2 nl_1)$
Calculer	$nl_2 = N^{(h)}(v_2)$
Calculer	$v_3 = (Id - k_n L^{(h)})^{-1}((Id + k_n/2 L^{(h)})v_1 - k_n L^{(h)}v_2 + k_n/2 nl_2)$
Calculer	$nl_3 = N^{(h)}(v_3)$
Calculer	$v_4 = (Id - k_n/3 L^{(h)})^{-1}(v_1 + 2k_n/3 L^{(h)}v_3 + k_n nl_3)$
Calculer	$nl_4 = N^{(h)}(v_4)$
Définir	$U^{n+1} = U^n + k_n/6 \left(nl_1 + nl_4 + L^{(h)}(v_1 + v_4) \right. \\ \left. + k_n/3 \left(nl_2 + nl_3 + L^{(h)}(v_2 + v_3) \right) \right)$

Schéma de splitting RK43-RK4 type Driscoll

Driscoll propose dans [Dri02] de séparer l'intégration des Y et des Z : l'idée consiste à utiliser un schéma RK43 pour l'équation en Y et un schéma RK4 explicite pour l'équation en Z . Nous avons testé ce schéma et une variante (plus stable) de celui-ci, présentée ci-dessous.

Le schéma de splitting RK43-RK4 amélioré

Poser	$v_1 = U^n, (Y^n, Z^n)^T = S^{-1}U^n, y_1 = Y^n, z_1 = Z^n$
Calculer	$(nly_1, nlz_1)^T = S^{-1}N^{(h)}(v_1)$
Calculer	$y_2 = (Id_1 - k_n/3 L_{11}^{(h)})^{-1}((Id_1 + k_n/6 L_{11}^{(h)})y_1 + k_n/2 (nly_1 + L_{12}^{(h)}z_1))$
Calculer	$z_2 = (Id_2 - k_n/3 L_{22}^{(h)})^{-1}((Id_2 + k_n/6 L_{22}^{(h)})z_1 + k_n/2 (nlz_1 + L_{21}^{(h)}y_2))$
Poser	$v_2 = S(y_2, z_2)^T$
Calculer	$(nly_2, nlz_2)^T = S^{-1}N^{(h)}(v_2)$
Calculer	$y_3 = (Id_1 - k_n L_{11}^{(h)})^{-1}((Id_1 + k_n/2 L_{11}^{(h)})y_1 - k_n L_{11}^{(h)}y_2 + k_n/2 (nly_2 + L_{12}^{(h)}z_2))$
Calculer	$z_3 = (Id_2 - k_n L_{22}^{(h)})^{-1}((Id_2 + k_n/2 L_{22}^{(h)})z_1 - k_n L_{22}^{(h)}z_2 + k_n/2 (nlz_2 + L_{21}^{(h)}y_3))$
Poser	$v_3 = S(y_3, z_3)^T$
Calculer	$(nly_3, nlz_3)^T = S^{-1}N^{(h)}(v_3)$
Calculer	$y_4 = (Id_1 - k_n/3 L_{11}^{(h)})^{-1}(y_1 + 2k_n/3 L_{11}^{(h)}y_3 + k_n (nly_3 + L_{12}^{(h)}z_3))$
Calculer	$z_4 = (Id_2 - k_n/3 L_{22}^{(h)})^{-1}(z_1 + 2k_n/3 L_{22}^{(h)}z_3 + k_n (nlz_3 + L_{21}^{(h)}y_4))$
Poser	$v_4 = S(y_4, z_4)^T$
Calculer	$(nly_4, nlz_4)^T = S^{-1}N^{(h)}(v_4)$
Définir	$Y^{n+1} = Y^n + k_n/6 \left(nly_1 + nly_4 + L_{11}^{(h)}(y_1 + y_4) + L_{12}^{(h)}(z_1 + z_4) \right. \\ \left. + k_n/3 \left(nly_2 + nly_3 + L_{11}^{(h)}(y_2 + y_3) + L_{12}^{(h)}(z_2 + z_3) \right) \right)$
Définir	$Z^{n+1} = Z^n + k_n/6 \left(nlz_1 + nlz_4 + L_{21}^{(h)}(y_1 + y_4) + L_{22}^{(h)}(z_1 + z_4) \right. \\ \left. + k_n/3 \left(nlz_2 + nlz_3 + L_{21}^{(h)}(y_2 + y_3) + L_{22}^{(h)}(z_2 + z_3) \right) \right)$

Schéma RK43 type “multiniveaux GNL”

On essaie d'écrire un algorithme multiniveaux type GNL. Il s'agit de décomposer la solution en deux parties, comme dans le cas précédent, mais cette fois-ci on résout par le schéma RK43 seulement l'équation en Y pendant que les Z sont figées. On remarque que le terme linéaire $L_{12}^{(h)} Z^n$ intervient comme un terme source, en explicite.

Le schéma RK43 type “multiniveaux GNL”

Poser	$v_1 = U^n, (Y^n, Z^n)^T = S^{-1}U^n, y_1 = Y^n$
Calculer	$(nly_1, nlz_1)^T = S^{-1}N^{(h)}(v_1)$
Calculer	$y_2 = (Id_1 - k_n/3 L_{11}^{(h)})^{-1}((Id_1 + k_n/6 L_{11}^{(h)})y_1 + k_n/2 (nly_1 + L_{12}^{(h)} Z^n))$
Poser	$v_2 = S(y_2, Z^n)^T$
Calculer	$(nly_2, nlz_2)^T = S^{-1}N^{(h)}(v_2)$
Calculer	$y_3 = (Id_1 - k_n L_{11}^{(h)})^{-1}((Id_1 + k_n/2 L_{11}^{(h)})y_1 - k_n L_{11}^{(h)}y_2 + k_n/2 (nly_2 + L_{12}^{(h)} Z^n))$
Poser	$v_3 = S(y_3, Z^n)^T$
Calculer	$(nly_3, nlz_3)^T = S^{-1}N^{(h)}(v_3)$
Calculer	$y_4 = (Id_1 - k_n/3 L_{11}^{(h)})^{-1}(y_1 + 2k_n/3 L_{11}^{(h)}y_3 + k_n (nly_3 + L_{12}^{(h)} Z^n))$
Poser	$v_4 = S(y_4, Z^n)^T$
Calculer	$(nly_4, nlz_4)^T = S^{-1}N^{(h)}(v_4)$
Définir	$Y^{n+1} = Y^n + k_n/6 (nly_1 + nly_4 + L_{11}^{(h)}(y_1 + y_4))$ $+ k_n/3 (nly_2 + nly_3 + L_{11}^{(h)}(y_2 + y_3)) + k_n L_{12}^{(h)} Z^n$
Définir	$Z^{n+1} = Z^n$

3 Application à certaines équations d'ondes

3.1 L'équation de Korteweg de Vries (KdV)

Considérons l'équation de KdV généralisée, écrite sous forme conservative :

$$\begin{cases} u_t + \partial_x \left(\mu u_{xx} + \frac{1}{p+1} u^{p+1} \right) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.42)$$

avec $\mu > 0$ et $p \geq 1$. Comme dans [?], on prend comme donnée initiale le soliton

$$u_0(x) = A \operatorname{sech}^{2/p}(K(x - x^0)),$$

alors la solution exacte de (3.42) est :

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^{2/p}(K(x - x^0 - Ct)), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

avec la vitesse C de propagation du soliton :

$$C = \frac{2A^p}{(p+1)(p+2)} \quad \text{et} \quad K = \frac{p}{2} \sqrt{\frac{C}{\mu}}.$$

Afin de simuler la solution physique qui est posée sur tout \mathbb{R} , on considère un domaine $\Omega = (0, L)$ avec L assez grand afin que le soliton reste complètement à l'intérieur du domaine même pour des simulations en temps très longues. Les conditions aux limites sont prises périodiques, mais des conditions de Dirichlet homogènes peuvent également être imposées. La solution initiale est un soliton centré en $x^0 = L/2$. On considérera les valeurs : $\mu = 10^{-4}$, $p = 4$ et amplitude $A = 0.8$, pour laquelle on n'a pas de phénomène d'explosion en temps finis. Dans les simulations suivantes, on prendra $L = 4$ ou $L = 8$ en fonction du temps d'arrêt T .

Pour des solutions assez régulières, les invariants de (3.42) s'écrivent :

$$\begin{aligned} I_{-1}(u) &= \int_0^L u(x, t) dx, \\ I_0(u) &= \int_0^L u^2(x, t) dx, \\ I_1(u) &= \int_0^L \left(u^{p+2} - \frac{(p+1)(p+2)\mu}{2} u_x^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Nous nous sommes inspirés des schémas en temps suivants :

1. schéma de type Crank-Nicholson (CN) ou (DSS),
2. schéma de Runge-Kutta classique (RK43),
3. plusieurs schéma en temps de type Crank-Nicholson ou Runge-Kutta avec séparation des échelles.

Les schémas classiques (RK43) et (CN) permettent de bien simuler le soliton qui est solution de (3.42) lorsque le pas d'espace h_j et l'ordre de discrétisation des opérateurs sont choisis convenablement. On peut conclure que :

1. Une discrétisation en espace des opérateurs qui est seulement d'ordre deux ne permet de simuler correctement la solution sur des longs intervalles de temps que si le pas de discrétisation en espace est suffisamment petit. Par la suite on prendra une discrétisation des opérateurs d'ordre 4 (ou supérieure), sauf pour le schéma (DSS), qui ne conserve exactement l'invariant I_0 que si les opérateurs sont d'ordre deux.
2. Pour un pas de temps $k_n = \delta t$ fixé, assez petit, si le pas d'espace est choisis trop grand, le schéma n'est pas stable. En effet, pour $\delta t = 0.001$ fixé, on représente en figure 3 deux évolutions non correctes du soliton. A gauche, avec $\Omega = (0, 4)$ et $h_j = 2^{-6}$, on représente la solution calculée à $t = 50$. La solution numérique a une vitesse et une amplitude supérieure à la solution exacte. A droite, avec $\Omega = (0, 8)$ et $h_j = 2^{-7}$, on représente la solution calculée à $t = 100$. La solution numérique a le bon profil mais présente encore une vitesse légèrement supérieure à la solution exacte. En revanche, si on prend $h_j \leq 2^{-8}$, l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte reste très petit même pour des longues simulations.

3.1.1 Schéma de Crank-Nicholson (CN)

Le schéma CN conserve seulement le premier invariant grâce à la forme conservative des équations. Afin de contrôler la conservation des invariants I_0 et I_1 , on regarde l'évolution de l'erreur relative commise sur ces deux invariants :

$$E_0(t) = \frac{|I_0(t) - I_0(0)|}{|I_0(0)|}, \quad E_1(t) = \frac{|I_1(t) - I_1(0)|}{|I_1(0)|}.$$

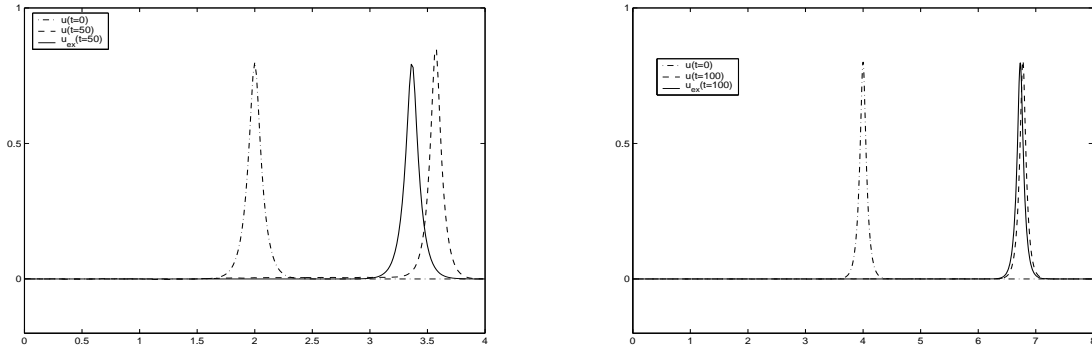


FIG. 3 – Soliton initial et son évolution en temps. A gauche : simulation jusqu'à $t = 50$ avec $h_j = 2^{-6}$. A droite : simulation jusqu'à $t = 100$ avec $h_j = 2^{-7}$.

Dans le tableau 1 on donne les erreurs relatives $E_0(t = 15)$ et $E_1(t = 15)$, en comparant la précision de l'algorithme de Crank-Nicholson (CN) pour des discrétisations des opérateurs d'ordre deux et quatre et pour différents nombres d'itérations non linéaires $kmax$. L'initialisation de chaque itération de point fixe est donnée par la formule d'extrapolation d'ordre deux $v_0 = (3U^n - U^{n-1})/2$, sauf pour la première itération pour laquelle on prend $v_0 = U^0$ et on fait $kmax + 2$ itérations internes. Ici, on fixe $h_j = 2^{-8}$ et $\delta t = 0.002$.

	$kmax = 3$	$kmax = 4$	$kmax = 10$
ORDRE 4			
$E_0(t = 15)$	$7 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-10}$
$E_1(t = 15)$	0.1158	$3 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$
ORDRE 2			
$E_0(t = 15)$	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
$E_1(t = 15)$	0.0316	0.0324	0.0324

TAB. 1 – Erreurs relatives $E_0(t = 15)$ et $E_1(t = 15)$, schéma (CN).

On constate que la conservation numérique du deuxième et troisième invariants est satisfaisante seulement à l'ordre quatre. La figure 4 représente l'évolution en temps de $E_1(t)$, en comparant deux discrétisations spatiales ($h_j = 2^{-7}$ et $h_j = 2^{-8}$), deux tests d'arrêt du point fixe ($kmax = 3$ et $kmax = 4$) et différents valeurs de δt . La conservation du troisième invariant s'améliore quand h_j et δt diminuent, en faisant un nombre d'itérations non linéaires très faible.

3.1.2 Schéma de Duràn Sanz-Serna (DSS)

La conservation théorique du deuxième invariant n'est possible que si les opérateurs sont discrétisés à l'ordre deux. Soit $\delta t = 0.002$ donné ; pour $h_j = 2^{-8}$ fixé, la partie supérieure du tableau 2 donne les erreurs relatives $E_0(t = 15)$ et $E_1(t = 15)$ en fonction du nombre d'itérations internes $kmax$, tandis que dans la partie inférieure on fixe $kmax = 4$, et on détermine les erreurs relatives en fonction du pas d'espace h_j . Pour obtenir des résultats satisfaisants, ce schéma requiert un pas d'espace très petit et un grand nombre d'itérations internes.

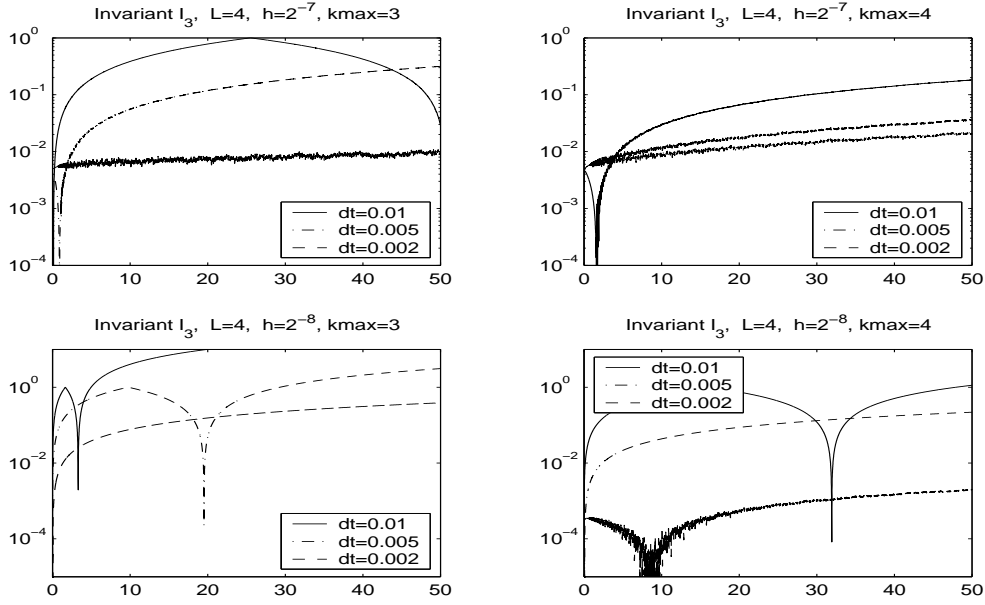


FIG. 4 – Evolution en temps de l'erreur du troisième invariant $E_1(t)$ pour différents pas de temps δt , pas d'espace h_j et itérations de point fixe $kmax$.

$h_j = 2^{-8}$	$kmax = 3$	$kmax = 4$	$kmax = 10$
$E_0(t = 15)$	$3 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-9}$	10^{-13}
$E_1(t = 15)$	0.91	0.91	0.91

$kmax = 4$	$h_j = 2^{-8}$	$h_j = 2^{-9}$	$h_j = 2^{-10}$
$E_0(t = 15)$	$2 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$7 \cdot 10^{-9}$
$E_1(t = 15)$	0.91	0.29	0.0796

TAB. 2 – Erreurs relatives $E_0(t = 15)$ et $E_1(t = 15)$, schéma (DSS).

3.1.3 Schéma classique RK43

Le schéma RK43 ne conserve que le premier invariant, grâce à la forme conservative des équations. Dans le tableau 3 on donne les erreurs relatives $E_0(t = 15)$ et $E_1(t = 15)$, en les comparant sur différentes grilles de discrétisation, avec $\delta t = 0.001$ fixé et des opérateurs discrétisés à l'ordre 4. La conservation numérique du deuxième invariant est satisfaisante. Celle du troisième invariant est assez bonne, malgré qu'elle se dégrade par rapport au schéma de Crank-Nicholson (CN) avec $kmax = 4$. Afin de réduire l'erreur relative E_1 sur le troisième invariant, il faut raffiner au même temps le pas d'espace et le pas de temps, comme on peut le constater en figure 5 qui représente son évolution en temps.

	$h_j = 2^{-7}$	$h_j = 2^{-8}$	$h_j = 2^{-9}$
$E_0(t = 15)$	10^{-7}	10^{-8}	10^{-8}
$E_1(t = 15)$	0.0151	0.0013	0.0364

TAB. 3 – Erreurs relatives $E_0(t = 15)$ et $E_1(t = 15)$, schéma (RK43).

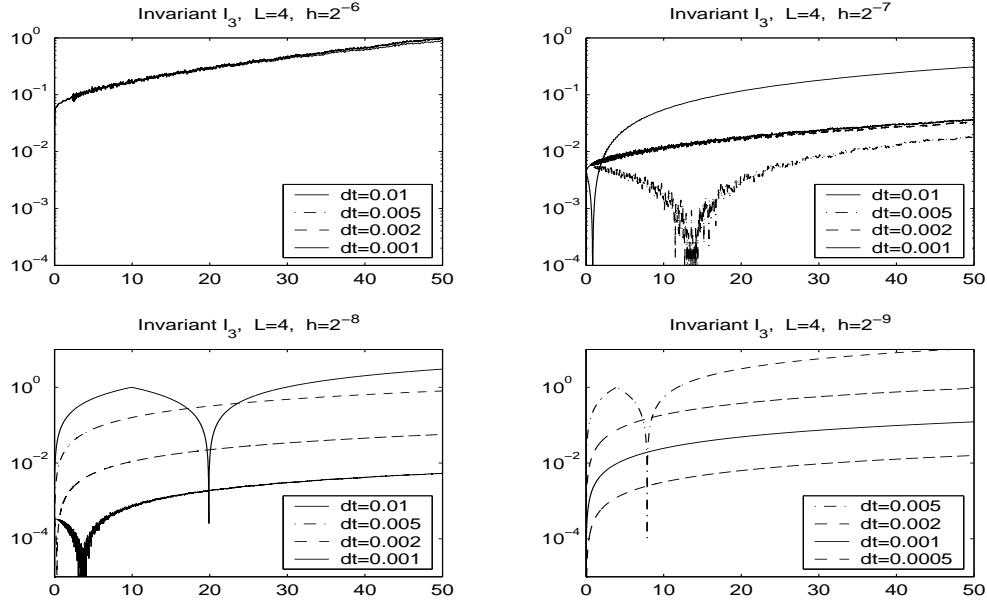


FIG. 5 – Evolution en temps de l'erreur du troisième invariant $E_1(t)$ pour différents pas de temps δt et pas d'espace h_j .

3.1.4 Plusieurs schémas en temps avec séparation des échelles

Avec une décomposition qui actuellement ne travaille que sur deux grilles, nous avons testé plusieurs algorithmes en temps associés à une analyse par ondelette interpolantes d'ordre élevé. On remarquera, en figure 6, la différence d'amplitude des coefficients des différents blocs dans lesquels la matrice de l'opérateur linéaire $L^{(h)}$ est décomposée par la séparation des échelles Y et Z .

Schéma de Crank-Nicholson (CN) et décomposition IU

La décomposition en grandes et petites échelles permet de résoudre itérativement les problèmes de point fixe en Y et en Z (voir le schéma (CN) et pt fixe en Y et en Z). Néanmoins, ce schéma est beaucoup moins stable que celui de (CN) classique. En effet, pour $h_j = 2^{-8}$ et $kmax = 4$ fixés, l'algorithme ne converge qu'à partir d'un $\delta t \leq 2 \cdot 10^{-4}$ et diverge pour $\delta t = 3 \cdot 10^{-4}$. Le problème pratique réside en la mise au point d'algorithmes de point fixe efficaces en Y et en Z .

Schéma de Runge-Kutta (RK43) et seuillage

Avec une décomposition $U^n(x_{j,k}) = Y^n(x_{j,k}) + Z^n(x_{j,k})$, à chaque itération en temps on considère un critère de seuillage sur les coefficients ondelettes de type

$$\text{si pour } l = -1, 0, +1 \quad Z^n(x_{j,k+l}) < \epsilon \text{ alors } Z^n(x_{j,k}) = 0.$$

La précision ϵ est fixée au départ et dépend du niveau de discrétisation du problème. Il reste à étudier plus en détail la relation entre le seuil ϵ , le pas d'espace h_j et le maximum des coefficients ondelettes. Pour ce qui concerne la technique de seuillage, on n'élimine pas un coefficient

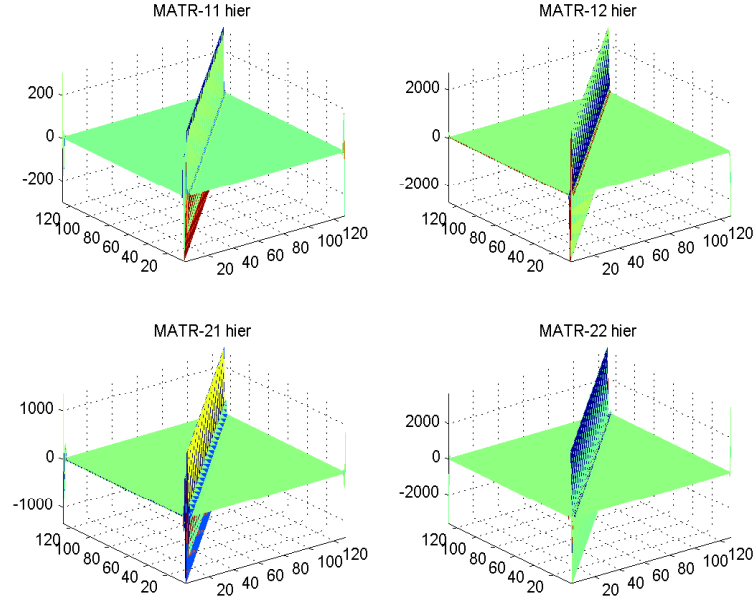


FIG. 6 – Représentation de l'amplitude des coefficients matriciels des blocs $L_{11}^{(h)}, L_{12}^{(h)}, L_{21}^{(h)}, L_{22}^{(h)}$.

ondelettes, même si inférieur au seuil fixé, lorsqu'il est voisin immédiat d'un coefficient de valeur supérieure au seuil. On pourra tester aussi de garder plusieurs voisins. Par ce critère de seuillage, on élimine plus de 90% des coefficients $Z^n(x_{j,k})$. En figure 7 on peut voir que les coefficients $Z^n(x_{j,k})$ non seuillés sont localisés autour du soliton.

Sans le critère qui prend en compte les voisins immédiats des coefficients sous le seuil ϵ , la solution calculée n'est plus correcte. On remarque cela en figure 8, non seulement sur le graphique de la solution, mais aussi sur l'erreur $\|u - u_{ex}\|^2$ et sur l'erreur relative $E_1(t)$ du troisième invariant.

En éliminant de cette manière des coefficients ondelettes, on se ramène à résoudre, à chaque itération en temps et pour chaque étape du schéma RK43, un système linéaire de taille inférieure à celle du problème sur la grille fine. Néanmoins, l'assemblage du terme non linéaire

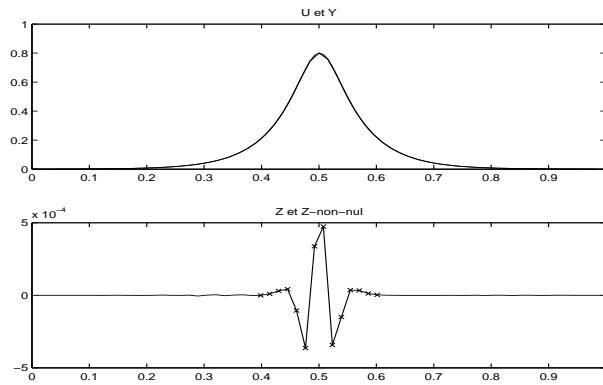


FIG. 7 – En haut : représentation de la solution $U^n(x)$ et $Y^n(x)$; en bas : représentation de $Z^n(x)$ et des coefficients non seuillés.

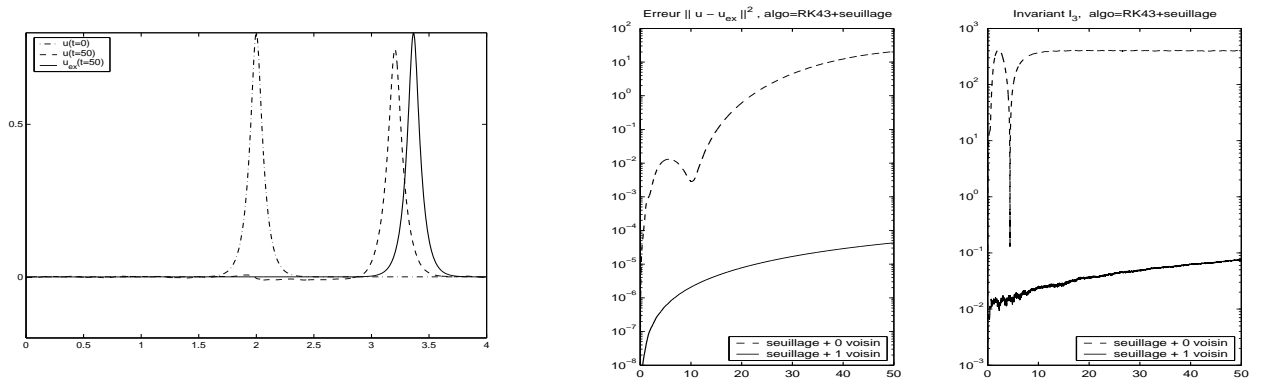


FIG. 8 – A gauche : Solution calculée et solution exacte à $t = 50$. A droite : évolution de l'erreur sur la solution $\|u - u_{ex}\|^2$ et de l'erreur relative $E_1(t)$ pour 0 ou 1 voisin ajouté au critère de seuillage.

est toujours effectué sur la base nodale, à partir de la solution reconstruite après l'étape de seuillage.

On fixe par la suite le domaine de calcul ($\Omega = (0, 4)$ pour des simulations jusqu'à $t = 50$ et $\Omega = (0, 8)$ pour des simulations jusqu'à $t = 100$), le pas d'espace $h_j = 2^{-8}$, le pas de temps $\delta t = 0.002$ et le paramètre de seuillage $\epsilon = 10^{-7}$.

On compare d'abord l'influence de l'ordre d'interpolation choisie pour effectuer la décomposition de la solution $U^n(x_{j,k}) = Y^n(x_{j,k}) + Z^n(x_{j,k})$. On trace en figure 9 l'évolution de l'erreur $\|u - u_{ex}\|^2$ et de l'erreur relative $E_1(t)$ sur le troisième invariant pour des interpolations d'ordre 4 et 6. On remarque immédiatement qu'il faut considérer des interpolations d'ordre supérieur à celui de discrétisation des opérateurs. En particulier, une discrétisation à l'ordre 4 nécessite d'une interpolation au moins d'ordre 6, pour que la solution numérique ait la bonne vitesse de propagation.

On compare ensuite l'influence du paramètre de seuillage ϵ . En figure 10 on représente l'évolution de l'erreur relative sur le troisième invariant $E_1(t)$, en considérant différentes valeurs de ϵ . Si on seuille avec des valeurs de $\epsilon > 10^{-6}$, le schéma n'est pas stable. Pour $10^{-6} \leq \epsilon < 10^{-7}$, l'erreur relative $\|u - u_{ex}\|^2$ croît jusqu'à 10^{-2} , mais soit $E_1(t)$ devient trop grand, soit il oscille beaucoup, c'est qui signifie que l'invariant $I_1(t)$ n'est pas bien conservé, même si sa valeur n'explose pas mais oscille autour de la valeur $I_1(t = 0)$. Des valeurs de ϵ égales à 10^{-7} (resp. $5 \cdot 10^{-7}$, 10^{-8}) sont appropriées et permettent en moyenne d'éliminer 488 (resp. 486, 481) coefficients sur $512 = \text{size}(Z)$.

Enfin, en figure 11 on présente à gauche la décomposition de la solution à $t = 100$, pour remarquer encore une fois que les coefficients $Z^n(x_{j,k})$ non seuillés restent localisés autour du soliton. Au centre on montre l'évolution de la norme euclidienne relative à la décomposition de la solution et du terme non linéaire. A droite on montre l'évolution de la norme euclidienne des différents blocs du terme linéaire, la plus part de ceux-ci étant négligés dans le cas du déraffinement de maillage.

Schémas “Driscoll et Driscoll amélioré” avec seuillage

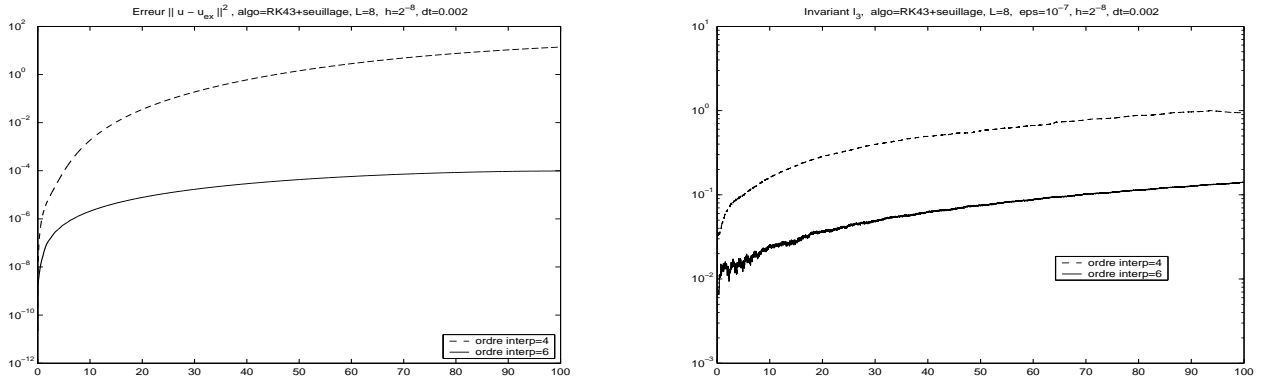


FIG. 9 – À gauche : évolution de l'erreur sur la solution $\|u - u_{ex}\|^2$; à droite : évolution de l'erreur relative $E_1(t)$ pour des interpolations d'ordre 4 et 6.

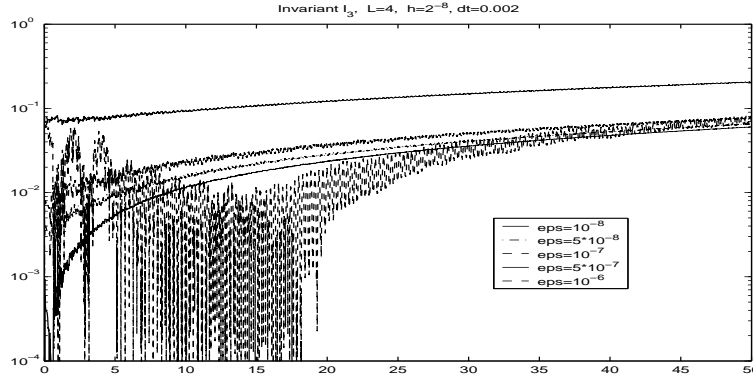


FIG. 10 – Evolution en temps de l'erreur du troisième invariant $E_1(t)$ pour différentes valeurs du paramètre de seuillage ϵ .

Pour cette classe de schémas, le critère de seuillage permet de séparer en deux parties la solution. A chaque itération en temps, on construit deux tableaux de pointeurs : le premier donne les points non seuillés, i.e. tous ceux de la grille grossière et ceux non seuillés appartenant à la grille fine ; le deuxième tableau contient les points correspondant aux coefficients ondelettes que dans le cas du “déraffinement” auraient été annulés.

A partir de cette décomposition des inconnues, on résout à chaque étape du RK43 deux systèmes couplés. Celui correspondant aux coefficients $Z^n(x_{j,k}) < \epsilon$ sera résolu soit par l'algorithme proposé par Driscoll [Dri02], soit par un algorithme appelé Driscoll amélioré (voir le schéma de splitting RK43-RK4 amélioré). La stabilité de ces deux schémas est comparable, mais bien inférieure à celle de l'algorithme type déraffinement de maillage. Le tableau 3.1.4 resume la stabilité de ces différents algorithmes. On effectue les calculs en fixant $h_j = 2^{-8}$ et éventuellement $\epsilon = 10^{-7}$. On remarque que les pas de temps pour assurer la stabilité sont beaucoup plus petits de ceux pour les schémas classiques ou avec seuillage.

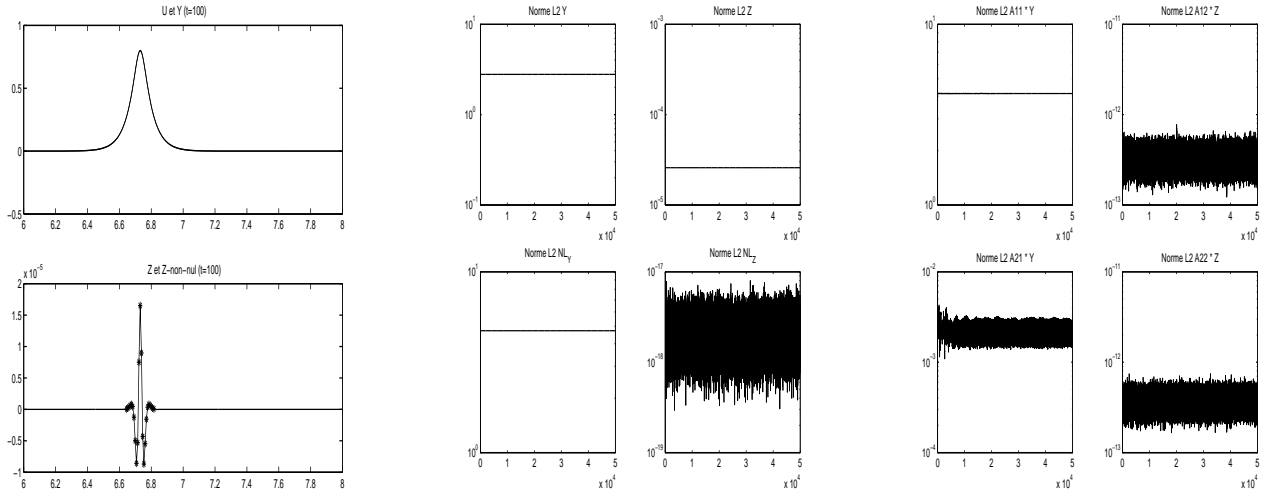


FIG. 11 – A gauche, zoom de la solution finale : en haut représentation de $U(x)$ et $Y(x)$, en bas de $Z(x)$ et des coefficients non seuillés. Au centre, en haut : norme des blocs Y et Z de la solution. Au centre, en bas : norme du terme non linéaire, projeté sur les blocs $Y + Z > \epsilon$ et $Z < \epsilon$. A droite : décomposition du terme linéaire sur les blocs $Y + Z > \epsilon$ et $Z < \epsilon$: seul le bloc en haut à gauche intervient dans les calculs.

algo	$\delta t = 0.001$	$\delta t = 0.0004$	$\delta t = 0.0003$
Driscoll	NAN	NAN	stable
Driscoll + seuillage	Z oscillent trop	$Z^n(x_{j,k}) > \epsilon$ dans tout Ω	stable
Driscoll amélioré	NAN	NAN	stable
Driscoll amélioré + seuillage	Z oscillent trop	$Z^n(x_{j,k}) > \epsilon$ dans tout Ω	stable

Schéma RK43 type “multiniveaux GNL”

Le dernier schéma proposé est un algorithme multiniveaux de type Galerkin Non Linéaire [?]. Il s’agit de décomposer la solution en deux parties, comme dans le cas précédent. Cette fois-ci, on résout à chaque étape du schéma RK43 un seul système non linéaire, celui relatif au bloc des coefficients Y et Z non seuillés, pendant que les coefficients Z sous le seuil sont figées (i.e. $Z^{n+1}(x_{j,k}) = Z^n(x_{j,k})$ si $Z^n(x_{j,k}) < \epsilon$).

Cet algorithme présente la même stabilité que l’algorithme de Runge-Kutta (RK43) avec seuillage (calculs effectués avec $\delta t = 0.002$). Néanmoins, il ne conserve pas correctement le troisième invariant, comme on peut l’observer dans la figure 12.

3.2 L’équation de Benjamin Ono (BO)

Considérons l’équation de Benjamin Ono généralisée suivante :

$$\begin{cases} u_t - \mathcal{H}(u_{xx}) + u^p u_x &= 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.43)$$

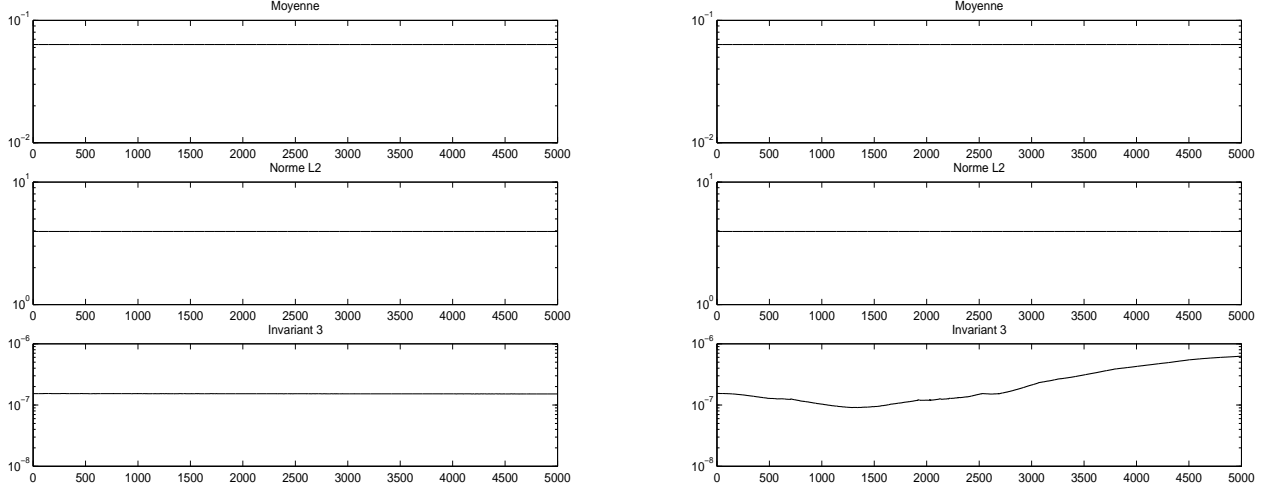


FIG. 12 – A gauche : evolution en temps des trois invariants de KDV pour l’algorithme RK43 avec seuillage. A droite : evolution en temps des trois invariants de KDV pour l’algorithme RK43 type “multiniveaux GNL”.

avec $p \geq 1$; ici \mathcal{H} désigne la transformée de Hilbert :

$$\mathcal{H}(u) = PV \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x-y)}{y} dy.$$

On réécrit cette équation sous forme conservative

$$\begin{cases} u_t - \partial_x \left(\mathcal{H}(u_x) + \frac{1}{p+1} u^{p+1} \right) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.44)$$

Lorsque $p = 1$, cette équation possède une infinité d’invariants, voir [ABFS89], parmi lesquels :

$$\begin{aligned} I_{-1}(u) &= \int u dx, \\ I_0(u) &= \int u^2 dx, \\ I_1(u) &= \frac{1}{3} \int u^3 dx - \int u \mathcal{H} u_x dx, \\ I_2(u) &= \frac{1}{4} \int u^4 dx - \frac{3}{2} \int u^2 \mathcal{H} u_x dx + 2 \int u_x^2 dx, \text{ (pour } p = 1 \text{)} \end{aligned}$$

et lorsque $p \geq 2$, l’équation n’a plus que 3 invariants

$$\begin{aligned} I_{-1}(u) &= \int u dx, \\ I_0(u) &= \int u^2 dx, \\ I_1(u) &= \frac{2}{(p+1)(p+2)} \int u^{p+2} dx - \int u \mathcal{H} u_x dx. \end{aligned}$$

Nous étudions ici cette équation sur l’intervalle unité avec des conditions aux limites périodiques.

3.2.1 Discrétisation en espace

La principale difficulté réside ici dans la discrétisation de la transformée de Hilbert de la dérivée seconde. Nous considérons pour cela deux approches

La première, comme proposée dans [BK04, TM98] est basée sur le calcul de $\mathcal{H}(u_{xx})$ dans l'espace de Fourier *via* le symbole de l'opérateur $\mathcal{H}\partial_{xx} : -i|\xi|\xi$, où $i = \sqrt{-1}$. Dans le cas périodique, cela permet d'effectuer efficacement le calcul au moyen de FFT. Toutefois, cela ne s'adresse qu'aux discrétisations d'ordre 2 en espace [TM98], pour les différences finies où à une méthode spectrale de Fourier [BK04].

En approchant la solution $u(x, t)$ par une série de Fourier tronquée

$$u_N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k(t) e^{ikx}$$

on est amené à intégrer numériquement en temps (dans l'espace de Fourier) le système différentiel

$$\frac{d\hat{u}_k(t)}{dt} + ik|k|\hat{u}_k + \frac{1}{p+1} \left(\widehat{u_N^{p+1}}(x, t) \right)_k = 0, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (3.45)$$

La seconde approche repose sur l'identité formelle

$$\mathcal{H}\partial_{xx} = \partial_x \sqrt{-\Delta}$$

que l'on obtient par interprétation du symbole. Cette écriture permet d'envisager la discrétisation de $\mathcal{H}(u_{xx})$ sous la forme

$$H = -D_x B$$

où D_x est une matrice (antisymétrique) de discrétisation de la dérivée première et B est la racine carrée matricielle de A , la matrice (symétrique et semi définie positive) $-\partial_{xx}$. Cette définition de H est donc compatible avec la discrétisation en espace au moyen de schémas aux différences (explicites) d'ordre élevé, voir annexe. Les schémas en temps seront alors développés dans l'espace physique pour l'intégration numérique du système

$$\frac{dU}{dt} + D_x \left(BU + \frac{1}{2} U^2 \right) = 0, \quad (3.46)$$

où $U(t)$ est le vecteur dont les composantes sont les approximations de $u(x, t)$ au points x_i de la grille en espace et au temps t . Il est à remarquer que si A est Toeplitz, semi définie positive, il en est de même pour B , néanmoins B est une matrice pleine. Il en découle que les 3 premiers invariants de BO sont automatiquement conservés pour l'équation semi-discrétisée en espace.

3.2.2 Schémas en temps

Nous considérons ici le schéma DSS de type Crank-Nicolson (qui conservent exactement 2 invariants).

3.2.3 Résultats numériques

Nous nous basons sur le travail de Bona et Kalisch [BK04] pour valider nos codes.

A titre de première illustration, nous considérons la simulation d'une travelling wave. L'équation BO possède la solution exacte

$$u(x, t) = \frac{\sin(\lambda)}{\cosh^2(\frac{\lambda}{2}) - \cos^2(\frac{x-ct}{2})},$$

avec la vitesse $c = \frac{1}{\tanh(\lambda)}$. Les deux premiers invariants sont parfaitement conservés tandis

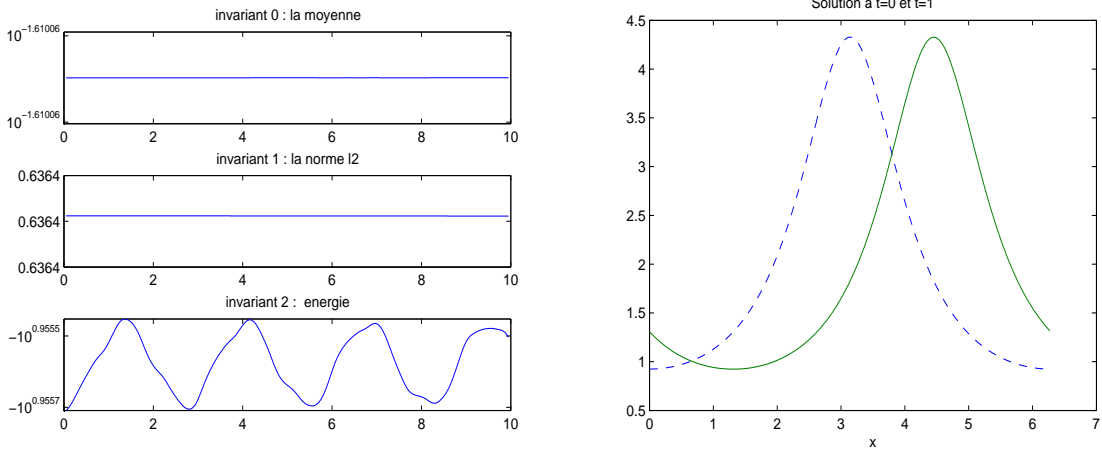


FIG. 13 – Schéma Sanz-Serna. Travelling wave avec $p = 1$, $\lambda = 1$ et $c = 1.313$, $\Delta t = 1.e - 4$, $N = 512$, ordre 2 en espace

que le troisième l'est numériquement avec une très grande précision ; l'erreur relative est inférieure à $1.e-3$.

3.3 L'équation de Kuramoto-Sivashinski (KSE)

L'équation de Kuramoto-Sivashinsky décrit la propagation d'un front de flamme d'une combustion, sous certaines hypothèses. En domaine périodique elle s'écrit sous la forme

$$u_t + u_{xxxx} + u_{xx} + \frac{1}{2}(u_x)^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (3.47)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(x + L, t) = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(x, t), j = 0, \dots, 3. \quad (3.49)$$

Cette équation comporte un terme dissipatif : elle a été étudiée dans le cadre de la théorie des variétés inertielles [Tem97] mais aussi, d'un point de vue numérique, dans l'optique de la

mise en œuvre de méthodes de type Galerkin non linéaire, voir par exemple [JRT01]. Ce n'est pas notre choix ici, mais signalons que certains auteurs considèrent l'équation obtenue par dérivation en espace de tous ses termes, sous une forme de type Burgers [JRT01] : en posant $v = \frac{\partial u}{\partial x}$,

$$v_t + v_{xxxx} + v_{xx} + vv_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (3.50)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial^j v}{\partial x^j}(x + L, t) = \frac{\partial^j v}{\partial x^j}(x, t), j = 0, \dots, 3. \quad (3.52)$$

3.3.1 Discrétisation du problème

Nous décrivons ici les schémas obtenus par discrétisation spatiale en différences finies. Nous avons également développés un code en Fourier, qui donne des résultats numériques comparables.

3.3.2 Discrétisation en espace

On note \hat{A} la matrice de discrétisation de l'opérateur $\partial_{xxxx} + \partial_{xx}$ sur la grille fine. On intègre alors le système différentiel

$$\hat{U}_t = -S^{-1}\hat{A}S\hat{U} - S^{-1}NL(S\hat{U}),$$

avec les notations habituelles.

3.3.3 Schémas en temps

Nous utilisons les 2 schémas suivants :

Schéma d'Euler implicite

Calculer	$u_{n+1} = (u_n + dtA)^{-1}(u_n - dtNL(u_n)),$
----------	--

Schéma d'Euler semi-implicite en Y et en Z

Calculer	$y_{n+1} = (y_n + dtA_{11})^{-1}(y_n - dt(A_{12}z_n + NL_y(y_n, z_n))),$
----------	--

calculer	$z_{n+1} = (Id + dt * A_{22})^{-1}(z_n - dt(A_{21}y_{n+1} + NL_z(y_n, z_n))).$
----------	--

3.3.4 Résultats numériques

Les résultats numériques présentés ici ont été comparés avec ceux de Lin Bo Zhang [Zha87], obtenus d'une part, avec une discrétisation spatiale par différences finies d'ordre 2 et, d'autre part, par une méthode spectrale en Fourier.

Influence de l'ordre du schéma d'interpolation

On observe numériquement que, le schéma semi-implicite est d'autant plus stable que l'ordre

d'interpolation est élevé, c'est à dire que les composantes en Z sont petites ; c'est en fait caractéristique de l'approche $Y - Z$ dès que le système est dissipatif. Cette influence est bien sûr renforcée si le schéma en espace n'est pas suffisamment précis ou si le pas de temps n'est pas assez petit : la perte de précision, typiquement l'affaissement de la "bosse" centrale du profil de flamme, survient pour des valeurs de Z pas assez "petites". C'est un indicateur pour développer des schémas adaptatifs pour cette équation. Par exemple, il a fallu prendre pour $N = 64$ (32 pts sur la grille grossière) et $L = 50$, des inconnues d'ordre 8, le pas de temps étant le même que celui de la méthode classique, à savoir $\Delta t = 0.01$.

Validation des résultats

Les comparaisons que nous faisons avec les résultats de Lin-Bo Zhang portent sur l'évolution en temps de la moyenne et sur l'évolution de la configuration du front de flamme à des temps donnés, étant évidemment partis de la même condition initiale : $u(x, 0) = \cos(\frac{2\pi x}{L})$.

Notre code en Fourier fournit exactement les mêmes résultats que ceux de Zhang, il peut servir de référence. C'est classique mais particulièrement valable pour KSE, le nombre de points de discrétisation nécessaire pour bien représenter la solution est très fortement lié à la précision avec laquelle les opérateurs différentiels sont approchés : les schémas en différences finies d'ordre élevés, tels les schémas compacts, permettent d'obtenir des résultats comparables avec ceux en Fourier en utilisant le même nombre de points.

Les résultats présenté ci-dessous ont été obtenus avec une discrétisation en espace d'ordre 4 et pour les valeurs de L , n et Δt suivantes :

- $L = 10$; $N = 16$, $\Delta t = 0.1$
- $L = 20$; $N = 32$, $\Delta t = 0.1$
- $L = 50$; $N = 64$, $\Delta t = 0.01$ (pour Euler et Euler Y-Z), 0.1 pour RK34
- $L = 100$; $N = 128$, $\Delta t = 0.005$

pour un jeu de paramètres donné, le nombre de points est le même que celui utilisé dans le code Fourier.

Evolution temporelle de la moyenne

Tous nos codes (différences finies, Fourier) fournissent les mêmes résultats qui sont conformes avec ceux obtenus par Lin-Bo Zhang [Zha87].

Evolution du front de flamme

Pour $L = 50$ et $N = 64$ (Figure 17), on observe un léger affaissement (oscillation) de la bosse centrale alors qu'elle devrait-être parfaitement plane, cela est vrai pour KSE nodal comme pour KSE Y-Z. Ce défaut disparaît en prenant plus de points ou en augmentant l'ordre de discrétisation en espace.

Pour $L = 100$ (Figure 18) et $N = 128$ les résultats de KSE nodal et KSE Y-Z sont comparables.

Concernant la rapidité d'exécution : le code en $Y - Z$ nécessite d'inverser à chaque étape 2 matrices de taille $N/2$ au lieu d'une matrice de taille N pour KSE nodal. On obtient un gain de temps de calcul avec l'approche Y-Z. Bien que les programmes aient été écrits en Matlab, ceci ouvre une perspective pour espérer obtenir des codes plus efficaces.

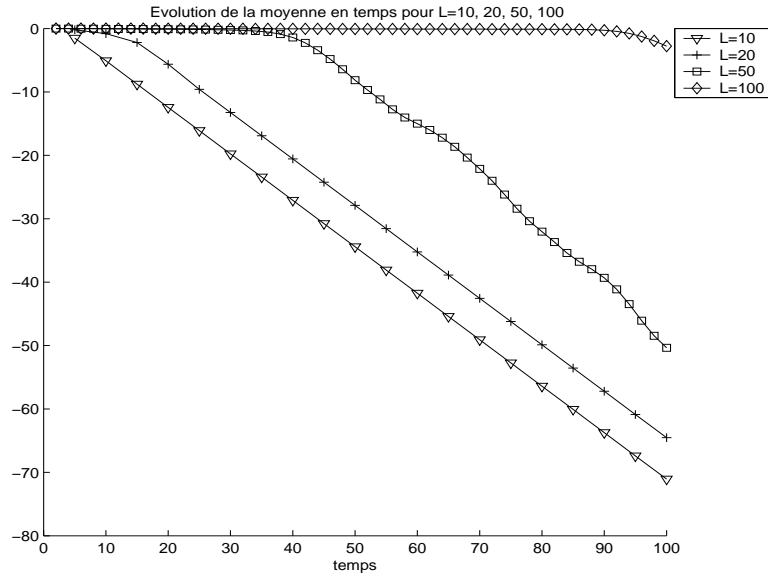


FIG. 14 – KSE : Moyenne en temps de la solution pour $L = 10, 20, 50, 100$

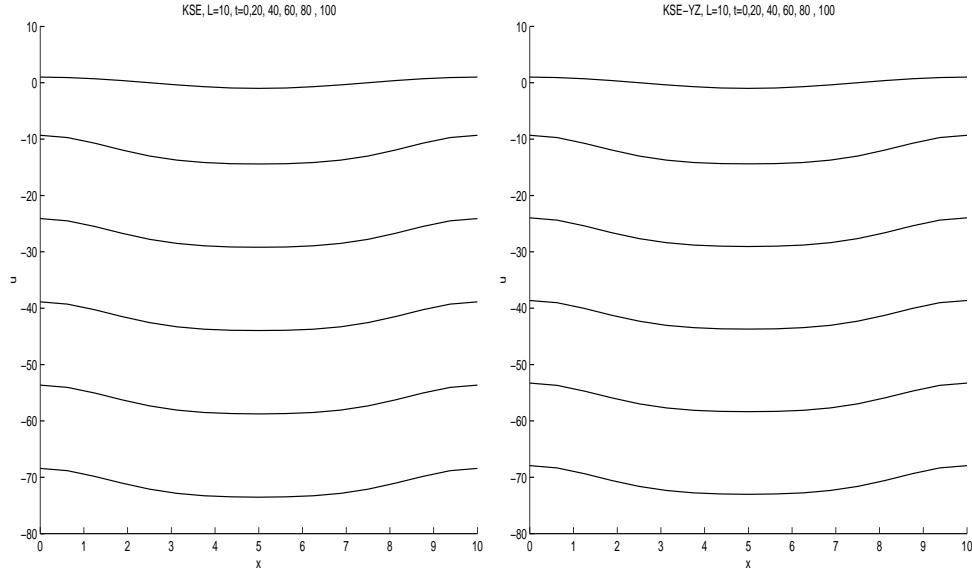


FIG. 15 – KSE : Front de flamme au temps 0, 20, 40, 60, 80, 100 pour $L = 10, \Delta t = 0.01, N = 64$
a) Euler classique, b) Euler Y-Z (IU2)

IU d'ordre élevé

Nous comparons ici les résultats pour $L = 50$ et $N = 64$ en prenant des discrétisations d'ordre

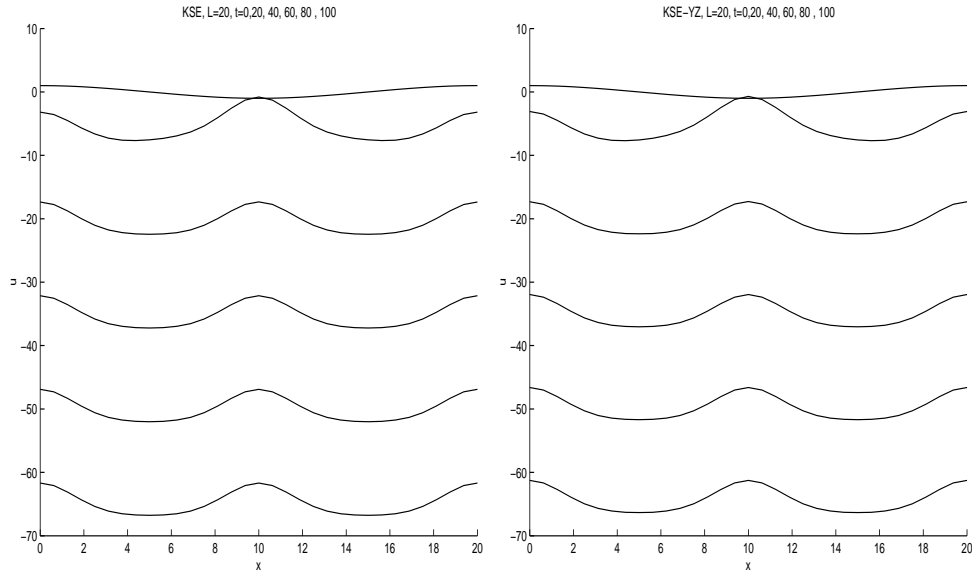


FIG. 16 – KSE : Front de flamme au temps 0, 20, 40, 60, 80, 100 pour $L = 20$, $\Delta t = 0.01$, $N = 64$
a) Euler classique, b) Euler Y-Z (IU4)

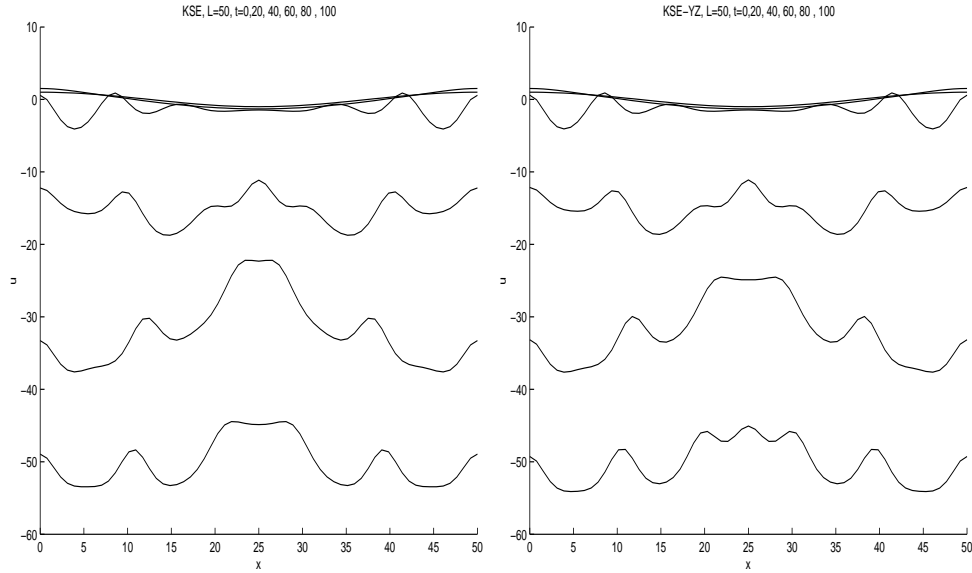


FIG. 17 – KSE : Front de flamme au temps 0, 20, 40, 60, 80, 100 pour $L = 50$, $\Delta t = 0.01$, $N = 64$
a) Euler classique, b) Euler Y-Z (IU8)

élevé en espace (schémas compacts (CS)) et en faisant varier l'ordre des inconnues incrémentales. Il apparaît clairement que l'ordre de grandeur des IU influe directement sur la précision

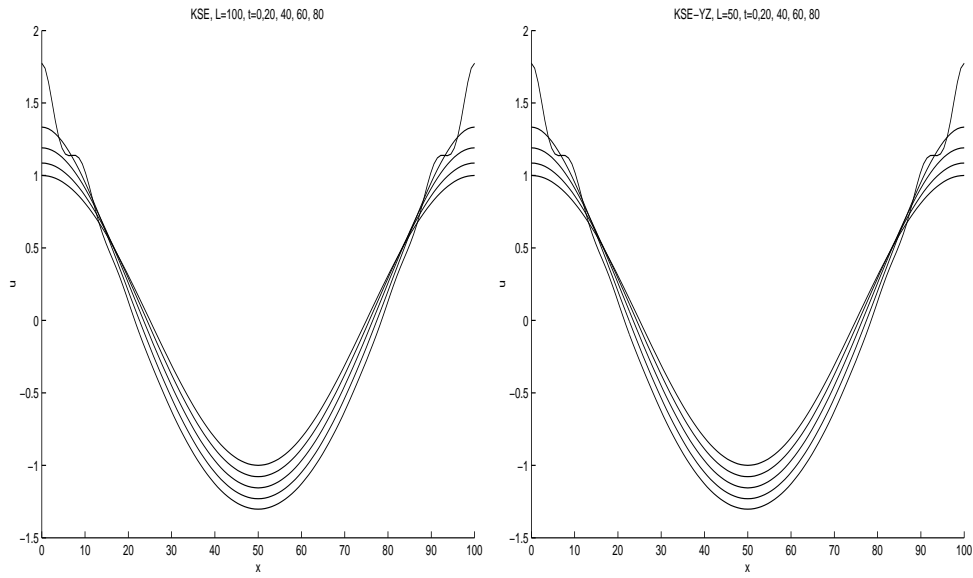


FIG. 18 – KSE : Front de flamme au temps 0, 20, 40, 60, 80 pour $L = 100$, $\Delta t = 0.01$, $N = 64$
a) Euler classique, b) Euler Y-Z (IU8)

du schéma. Les résultats du schéma en Y-Z présentés figures 19 et 20 sont comparables à ceux du schéma classique dès que sont utilisées de IU d'ordre 6.

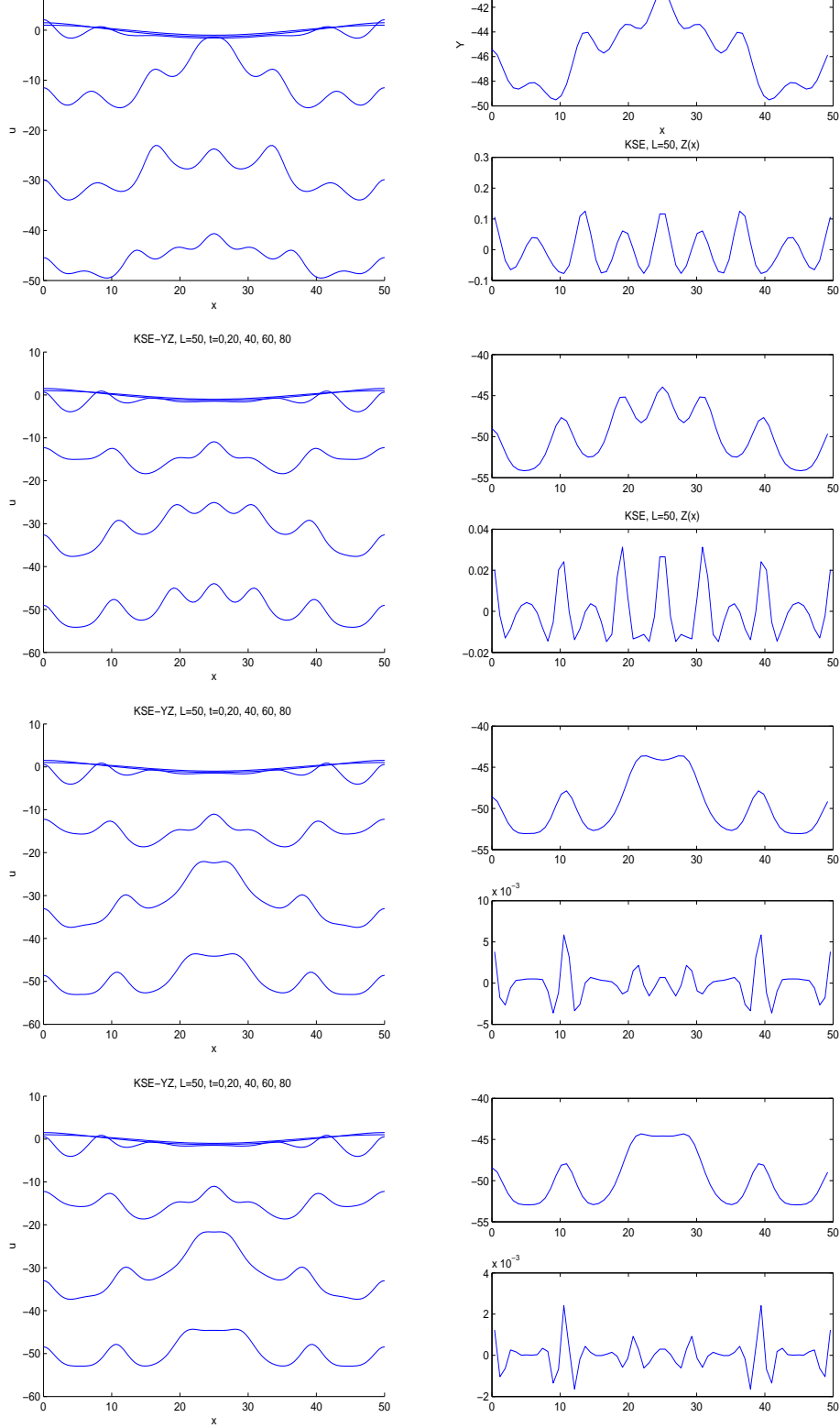


FIG. 19 – KSE : Front de flamme au temps 0, 20, 40, 60, 80 pour $L = 50$, $\Delta t = 0.005$, $N = 64$
 Discr. espace : CS 4 , a) IU2, b) IU4, c) IU6, d) IU8

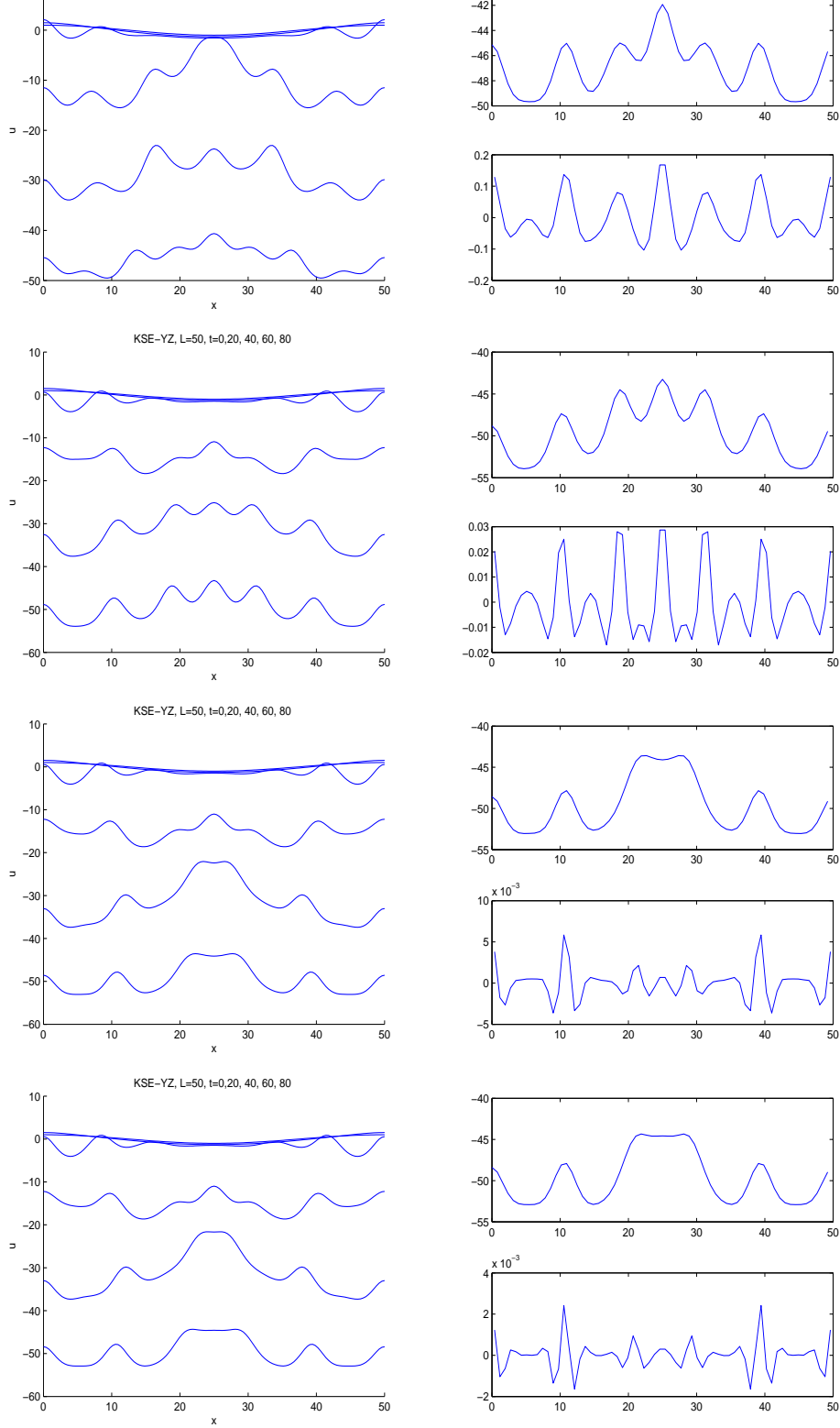


FIG. 20 – KSE : Front de flamme au temps 0, 20, 40, 60, 80 pour $L = 50$, $\Delta t = 0.005$, $N = 64$
 Discr. espace : CS 6 a) IU2, b) IU4, c) IU6, d) IU8

Remerciements : Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet CNRS/DGRST, Action d'échanges 2003, code 03/R 1503, "Simulation multi-échelle et analyse mathématique des équations d'ondes dispersives". Il a également bénéficié du support du programme Méditerranée 3+3 MASOH (Modélisation Analyse Simulation Ondes Hydrodynamiques) de l'INRIA.

4 Conclusion

A travers ce travail, nous avons essayé de mettre en œuvre, en les adaptant, des méthodes multiniveaux empruntant aux idées de GNL. Il ressort de nos simulations que le manque de régularisation, donc de transfert d'énergie des hauts vers les bas modes de Fourier, pour KdV et BO, ne permet pas d'adapter directement la stratégie utilisée pour les équations dissipatives. *A contrario*, l'équation de Kuramoto Sivashinski, par ses propriétés dissipatives rend possible une telle adaptation, ce qui permet d'appliquer avec succès les techniques multiniveaux. Notons tout de même que l'analyse des solutions numériques par des bases hiérarchiques, ondelettes ou inconnues incrémentales, se présente comme un outil pour développer des maillages adaptatifs, pour capter une solution explosive localisée par exemple. Elles peuvent également être mises en œuvre pour filtrer certaines fréquences (seuillage).

Les propriétés de régularisation semblent donc bien être nécessaires à l'application d'une approche multiniveaux de type GNL et il serait intéressant de considérer les équations faiblement amorties, telles que KdV ou NLS pour lesquelles les solutions sont régularisées asymptotiquement en temps. Ceci est une situation intermédiaire entre le cas dissipatif et celui dispersif.

Références

- [ABFS89] L. Abdelouhab, J. L. Bona, M. Fellant, and J.-C. Saut. Nonlocal models for nonlinear dispersive waves. *Physica D*, 40 :360–392, 1989.
- [AMC⁺08] M. Abounouh, H. Al Moatassime, J.-P. Chehab, S. Dumont, and O. Goubet. Discrete schrodinger equations and dissipative dynamical systems. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 7(2) :211–227, 2008.
- [BC98] Rolf Bronstering and Min Chen. Bifurcations of finite difference schemes and their approximate inertial forms. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 32(6) :715–728, 1998.
- [BDK86] J. Bona, V. Dougalis, and O. Karakashian. Fully discrete galerkin methods for the korteweg-de vries equation. *Comput. Math. Appl.*, Part A 12 :859–884, 1986.
- [BDOM95] J. Bona, V. Dougalis, O. Karakashian, and W. McKinney. Conservative, high-order numerical schemes for the generalized korteweg de vries equation. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 1695 :107–164, 1995.
- [BK04] J. L. Bona and H. Kalisch. Singularity formation in the generalized Benjamin-Ono equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 11(1) :27–45, 2004.
- [Bon] J. Bona, V. Dougalis, O. Karakashian and W. Mc Kinney *Numerical simulation of singular solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation*. Mathematical problems in the theory of water waves. A workshop on the problems in the theory of nonlinear hydrodynamic waves May 15–19, 1995, Luminy, France. Providence, RI : American Mathematical Society. Contemp. Math. 200, 17-29, 1996.
- [CC03] J.-P. Chehab and B. Costa. Multiparameter schemes for evolutive pdes. *Numerical Algorithms*, 34 :245–257, 2003.
- [CC04] J.-P. Chehab and B. Costa. Time explicit schemes and spatial finite differences splittings. *J. Scient. Computing*, 20(2) :159–189, 2004.
- [CDGT01] B. Costa, L. Dettori, D. Gottlieb, and R. Temam. Time marching techniques for the nonlinear galerkin method. *SIAM J. SC. comp.*, 23 :46–65, 2001.
- [CDL98] C. Calgaro, A. Debussche, and J. Laminie. On a multilevel approach for the two dimensional Navier-Stokes equations with finite elements. *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, 27 :241–258, 1998.
- [CGA91] M. Carpenter, D. Gottlieb, and S. Abarbanel. The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite-difference schemes cga. ICASE report, NASA, 1991.
- [Che98] Jean-Paul Chehab. Incremental unknowns method and compact schemes. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 32(1) :51–83, 1998.
- [CLT97] C. Calgaro, J. Laminie, and R. Temam. Dynamic multilevel schemes for the solution of evolution equations by hierarchical finite element discretization. *Applied Numer. Math.*, 23 :403–442, 1997.
- [CM98] J.-P. Chehab and A. Miranville. Incremental unknowns on nonuniform meshes. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 32(5) :539–577, 1998.
- [CS94] B. Cockburn and C.W. Shu. Nonlinearly stable compact schemes for shock calculation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(3) :607–627, 1994.

- [CT91a] M. Chen and R Temam. The incremental unknown method 1. *Applied Mathematics Letters*, 4(1-3) :73–76, 1991.
- [CT91b] M. Chen and R Temam. The incremental unknown method 2. *Applied Mathematics Letters*, 4(3) :77–80, 1991.
- [CT93] M. Chen and R Temam. The incremental unknown for convection-diffusion equations. *Applied Mathematics Letters*, 11(5) :365–383, 1993.
- [Dau93] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1993.
- [DD89] Gilles Deslauriers and Serge Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. *Constructive Approximation*, 5(1) :49–68, 1989.
- [DDT95] A. Debussche, T. Dubois, and R. Temam. The nonlinear garlerkin method : A multiscale method applied to the simulation of homogeneous turbulent flows. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 7 :279–15, 1995.
- [DFP81] M. Delfour, M. Fortin, and G. Payre. Finite difference solution of a nonlinear schrödinger equation. *JCP*, 44 :277–288, 1981.
- [DJT98] T. Dubois, F. Jauberteau, and R. Temam. *Dynamic multilevel methods and the numerical simulation of turbulence*. Cambridge University Press, 1998.
- [DLZ05] A. Debussche, J. Laminie, and E. Zahrouni. A dynamical multilevel scheme for the burgers equation : wavelet and hierarchical finite element. *J. Sc. Comput.*, 25(3) :445–497, 2005.
- [Don92] David L. Donoho. Interpolating wavelet transforms. Publications of the Dep. of Statistics, Stanford University, 1992.
- [Dri02] T. A. Driscoll. A composite runge-kutta method for the spectral solution of semi-linear pde. *J. Comp. Phys.*, 182 :357–367, 2002.
- [DSS00] A. Durán and J.M. Sanz-Serna. The numerical integration of a relative equilibrium solutions. the nonlinear schrödinger equation. *IMA J. Num. Anal.*, 20 :235–261, 2000.
- [Ghi88a] J.M. Ghidaglia. Finite dimensional behavior for the weakly damped driven schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 5 :365–405, 1988.
- [Ghi88b] J.M. Ghidaglia. Weakly damped forced korteweg-de vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time. *J. Diff. Eq.*, 74 :369–390, 1988.
- [Ghi94] J.M. Ghidaglia. A note on the strong convergence towards attractors for damped forced kdv equations. *J. Diff. Eq.*, 110 :356–359, 1994.
- [Gou93] O. Goubet. Nonlinear galerkin methods using hierarchical almost-orthogonal finite elements bases. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 20(3) :223–247, 1993.
- [Gou96] O. Goubet. Regularity of the attractor for the weakly damped nonlinear schrodinger equations. *Applicable Anal.*, 60 :99–119, 1996.
- [Gou00] O. Goubet. Asymptotic smoothing effect for weakly damped forced korteweg-de vries equations. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 6(3) :625–644, 2000.
- [GR02] O. Goubet and R. Rosa. Asymptotic smoothing and the global attractor of a weakly damped kdv equation on the real line. *J. Differential Equations*, 185(1) :25–53, 2002.

- [JRT01] M. Jolly, R. Rosa, and R. Temam. Accurate computations on inertial manifolds. *Siam J. Sc. Comput.*, 22(6) :2216–2238, 2001.
- [Le192] Sanjiva K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, 103(1) :16–42, 1992.
- [LW04] Jian-Guo Liu and Cheng Wang. High order finite difference methods for unsteady incompressible flows in multi-connected domains. *Comput. & Fluids*, 33(2) :223–255, 2004.
- [MDD93] J.P. Mongeau, G. Deslauriers, and S. Dubuc. Continuous and differentiable multidimensional iterative interpolation. *Linear Algebra and its Applications*, 180 :95–120, 1993.
- [Mey97] Y. Meyer. Wavelets and fast numerical algorithms. In *Handbook of numerical analysis, Vol. V*, Handb. Numer. Anal., V, pages 639–713. North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [MT89] M. Marion and R. Temam. Nonlinear galerkin methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26 :1139–1157, 1989.
- [MT90] M. Marion and R. Temam. Nonlinear galerkin methods : the finite element case. *Numer. Math.*, 57 :205–226, 1990.
- [Pas92] F. Pascal. *Méthodes de Galerkin non linéaires en discrétisation par éléments finis et pseudo-spectrale. Application à la mécanique des fluides*. Thèse, Université Paris Sud, Mathématique, 1992.
- [Pou98] F. Pouit. *Etude de schémas numériques multiniveaux utilisant les inconnues incrémentales dans le cas des différences finies : application à la mécanique des fluides*. Thèse, Université Paris Sud, Mathématique, 1998.
- [She91] J. Shen. Hopf bifurcation of the unsteady regularized driven cavity flow. *J. Comput. Phys.*, 95 :228–245, 1991.
- [Tem90] R. Temam. Inertial manifolds and multigrid methods. *SIAM J. Math. Anal.*, 21 :154–178, 1990.
- [Tem97] R. Temam. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Number 68 in Applied Mathematical Science. Springer Verlag, 1997.
- [TM98] V. Thomée and M. Vasudeva Murthy. A numerical method for the benjamin-ono equation. *BIT*, 38, no. 3 :597–611, 1998.
- [Wor91] Workshop, Raleigh/ NC (USA) 1990. *Fully-discrete methods with grid refinement for the generalized Korteweg-de Vries equation*, Viscous profiles and numerical methods for shock waves, 1991.
- [Zha87] Lin-Bo Zhang. *Un schéma de semi-discrétisation en temps pour des systèmes différentiels discrétisés en espace par la méthode de Fourier. Résolution numérique des équations de Navier-Stokes stationnaires par la méthode multigrille*. Thèse, Université Paris Sud, Mathématique, 1987.

5 Annexe

5.1 Schémas de discrétisation et d'interpolation

5.1.1 Les schémas complets

On reprend les notations dde la section 2. Voici les tableaux pour les schémas d'interpolation généraux. La suite $(f_{j+1,k})_k$ approchant f aux points de la grille \mathcal{G}_{j+1} de niveau $j+1$ est définie par le schéma suivant :

$$f_{j+1,2k} = f_{j,k}, \quad f_{j+1,2k+1} = P_{j+1,2k+1}(x_{j+1,2k+1}) = \sum_{l=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} h_l f_{j,k+l}$$

avec $P_{j+1,2k+1}$ le polynôme d'interpolation dans la base de Lagrange qui nous permet de calculer la valeur d'une fonction f au point $x_{j+1,2k+1} = \frac{2k+1}{2^{j+1}}$ par interpolation de valeurs approchées de f sur la grille \mathcal{G}_j de niveau j . M indique l'ordre de l'interpolation et la somme a été détaillée pour le cas des "point centraux".

5.1.2 Formules d'interpolation pour les inconnues incrémentales et les interpolettes

Les coefficients h_l pour le bord gauche et les points centraux sont donnés dans les tableaux suivant. Les poids sont les mêmes pour le bord droit, mais sont à prendre dans l'ordre inverse.

– Interpolation d'ordre 4

Bord gauche ($k=0$) et points centraux ($k>0$).

1	-1	0	1	2	3
k=0		5/16	15/16	-5/16	1/16
k>0	-1/16	9/16	9/16	-1/16	

– Interpolation d'ordre 6

Bord gauche ($k=0,1$) et points centraux ($k>1$).

1	-2	-1	0	1	2	3	4	5
k=0			63/256	315/256	-105/128	63/128	-45/256	7/256
k=1		-7/256	105/256	105/128	-35/128	21/256	-3/256	
k>1	3/256	-25/256	75/128	75/128	-25/256	3/256		

– Interpolation d'ordre 8

Bord gauche ($k=0,1,2$) et points centraux ($k>2$). Il faut diviser les valeurs de la table ci-dessous par 2048.

1	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
k=0				429	3003	-3003	3003	-2145	1001	-273	33
k=1			-33	693	2079	-1155	693	-297	77	-9	
k=2		9	-105	945	1575	-525	189	-45	5		
k>2	-5	49	-245	1225	1225	-245	49	-5			

Remarque 3 Lorsque les conditions aux limites sont périodiques, les schémas d'interpolation s'appliquent en tout point. Pour des conditions de type Dirichlet ou Neumann, par exemple, il faut définir des schémas particuliers près des bords ; la complexité augmente de manière dramatique avec l'ordre.

5.1.3 Schémas aux différences pour les dérivées

Pour tout entier i , on définit l'approximation de la dérivée partielle $\frac{\partial^i}{\partial x^i}$ aux points de la grille dyadique \mathcal{G}_j , par un opérateur aux différences finies centrées d'ordre M comme suit :

$$D_j^{(i)} : V_j \rightarrow V_j$$

$$f \longmapsto \sum_{k=0}^{2^j-1} D_j^{(i)} f(x_{j,k}) \varphi_{j,k}$$

où

$$D_j^{(i)} f(x_{j,k}) = \frac{1}{h_j^i} \sum_s d_s^{(i)} f_{j,k+s}.$$

Les tableaux suivants donnent les coefficients $d_s^{(i)}$ pour le calcul des plusieurs dérivées en espace et pour plusieurs ordres de précision M . Lorsque les conditions aux limites du problème sont périodiques, les schémas de discrétisation sont centrés, en revanche on utilisera des schémas décentrés pour les points du maillage spatial qui sont près du bord du domaine.

– Dérivée première

Coefficients $d_s^{(1)}$ pour le bord gauche et les points centraux. Les coefficients pour le bord droit sont de signe opposé et pris dans l'ordre inverse.

ordre	s=	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
M=2	k=0				-3/2	2	-1/2		
	k>0			-1/2	0	1/2			
M=4	k=0				-25/12	4	-3	4/3	-1/4
	k=1			-1/4	-5/6	3/2	-1/2	1/12	
	k>1		1/12	-2/3	0	2/3	-1/12		
M=6	k>2	-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60	

– Dérivée seconde

Coefficients $d_s^{(2)}$ pour le bord gauche et les points centraux. Les coefficients pour le bord droit sont pris dans l'ordre inverse.

ordre	s=	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
M=2	k=0				2	-5	4	-1		
	k>0			1	-2	1				
M=4	k=0				15/4	-77/6	107/6	-13	61/12	-5/6
	k=1			5/6	-5/4	-1/3	7/6	-1/2	1/12	
	k>1		-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12			
M=6	k>2	1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90		

Dérivée troisième Coefficients $d_s^{(3)}$ pour le bord gauche et les points centraux. Les coefficients pour le bord droit sont de signe opposé et pris dans l'ordre inverse.

ordre	s=	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
M=2	k=0					-17/4	71/4	-59/2	49/2	-41/4	7/4
	k=1				-7/4	25/4	-17/2	11/2	-7/4	1/4	
	k>1			-1/2	1	0	-1	1/2			
M=4	k=0					-967/120	638/15	-3929/40	389/3	-2545/24	268/5
	k=1				-29/15	889/120	-58/5	241/24	-17/3	89/40	-8/15
	k=2			-7/120	-22/15	231/40	-25/3	143/24	-12/5	71/120	-1/15
	k>2		1/8	-1	13/8	0	-13/8	1	-1/8		
M=6	k>3	-7/240	3/10	-169/120	61/30	0	-61/30	169/120	-3/10	7/240	

Dérivée quatrième Coefficients $d_s^{(4)}$ pour le bord gauche et les points centraux. Les coefficients pour le bord droit sont pris dans l'ordre inverse.

ordre	s=	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
M=2	k=0				3	-14	26	-24	11	-2		
	k=1			2	-9	16	-14	6	-1			
	k>1		1	-4	6	-4	1					
M=4	k=0				28/3	-111/2	142	-1219/6	176	-185/2	82/3	-7/2
	k=1			7/2	-56/3	85/2	-54	251/6	-20	11/2	-2/3	
	k=2		2/3	-11/6	0	31/6	-22/3	9/2	-4/3	1/6		
	k>2	-1/6	2	-13/2	28/3	-13/2	2	-1/6				

Remarque 4 Recherche de schémas préservant la hiérarchie. Par ailleurs, nous avons développé des codes de calcul formel (en Maple) pour construire des schémas essentiellement invariants par hiérarchisation ; c'est à dire que la restriction de la discrétisation de l'opérateur différentiel à la grille grossière, dans la base hiérarchique, est proportionnelle à la matrice de discrétisation du même opérateur, dans la base nodale, à un terme d'ordre inférieur près. Cette propriété est importante puisqu'elle permet de reconstruire localement les opérateurs très facilement, allégeant ainsi les calculs et les stockages matriciels. Certains opérateurs, d'ordre pair par exemple, ont cette propriété (typiquement la dérivée seconde en dimension 1). Ce n'est malheureusement pas le cas pour les schémas de discrétisation de la dérivée troisième. Néanmoins, cette investigation permis de mettre en évidence que la hiérarchisation faisait passer d'une famille de couplage discrétisation - interpolation à une autre. Nous envisageons de construire des familles de schémas sous contrainte, quitte à augmenter la largeur de bande du schéma.

5.2 Inconnues Incrémentales ℓ^2 orthogonales

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, les méthodes de Galerkin non linéaires reposent sur l'utilisation d'une loi (exacte ou approchée) $z = \phi(y)$ décrivant l'interaction entre grandes structures y et des petites structures z . Ce type de relation a d'abord été proposé dans le cadre spectral et s'appuie sur la propriété d'orthogonalité L^2 des échelles, [MT89, MT90, Tem97, DJT98], l'adaptation aux ondelettes est proposée dans [Gou93]. Les Inconnues Incrémentales telles qu'introduites dans [Tem90] ne jouissent pas de cette propriétés d'orthogonalité. On peut néanmoins construire des I.I. en s'inspirant des ondelettes de Haar

[CT93]. Ce sont des inconnues d'ordre 1 et il a été proposé des IU orthogonales d'ordre 2 dans [BC98]. Le principe de construction en est le suivant (pour une discrétisation sur l'intervalle et pour des conditions aux limites de type Dirichlet). On se donne $2N - 1$ points intérieurs de $]0, 1[$ régulièrement répartis et l'on définit les espaces

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_N &= \{U \in \mathbb{R}^{2N-1} / -U_{2i-2} + 2U_{2i-1} - U_{2i} = 0, \ i = 1, \dots, N\}, \\ \mathcal{Q}_N &= \{U \in \mathbb{R}^{2N-1} / U_{2i-1} + 2U_{2i} + U_{2i+1} = 0, \ i = 1, \dots, N-1\}.\end{aligned}$$

Nous avons alors $\dim(\mathcal{P}_h) = N-1$, $\dim(\mathcal{Q}_h) = N$ et $\mathbb{R}^{2N-1} = (\mathcal{P}_h) \oplus (\mathcal{Q}_h)$, $(\mathcal{P}_h) \perp (\mathcal{Q}_h) = N$. On écrit

$$\begin{aligned}p_i &= \frac{1}{4} (U_{2i-1} + 2U_{2i} + U_{2i+1}), \ i = 1, \dots, N-1, \\ q_i &= \frac{1}{4} (-U_{2i-2} + 2U_{2i-1} - U_{2i}), \ i = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

On a alors

$$u = V^T p + W^T q$$

avec V et W matrices orthogonales. En posant $T = VV^T + WW^T$, on peut écrire

$$Tu = Vp + Wq$$

d'où

$$u = T^{-1}Vp + T^{-1}Wq (= y + z)$$

Nous représentons ci-dessous la décomposition de la fonction $u(x) = \sin(2\pi x)\exp(-(x-0.5)^2/0.01)$ en inconnues incrémentales orthogonales d'ordre 2, sur deux niveaux de grilles. On remarquera le caractère oscillant des z , lié aux propriétés d'orthogonalité, ce que l'on ne retrouve pas dans les II classiques.

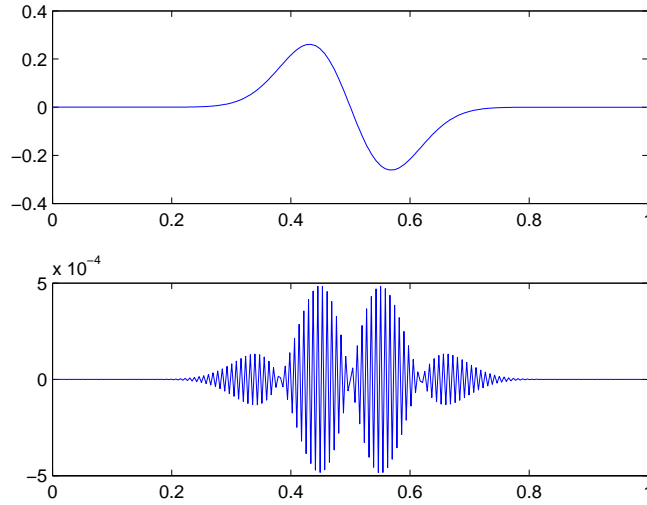


FIG. 21 – $u(x) = \sin(2\pi x)\exp(-(x - 0.5)^2/0.01)$, Y et Z